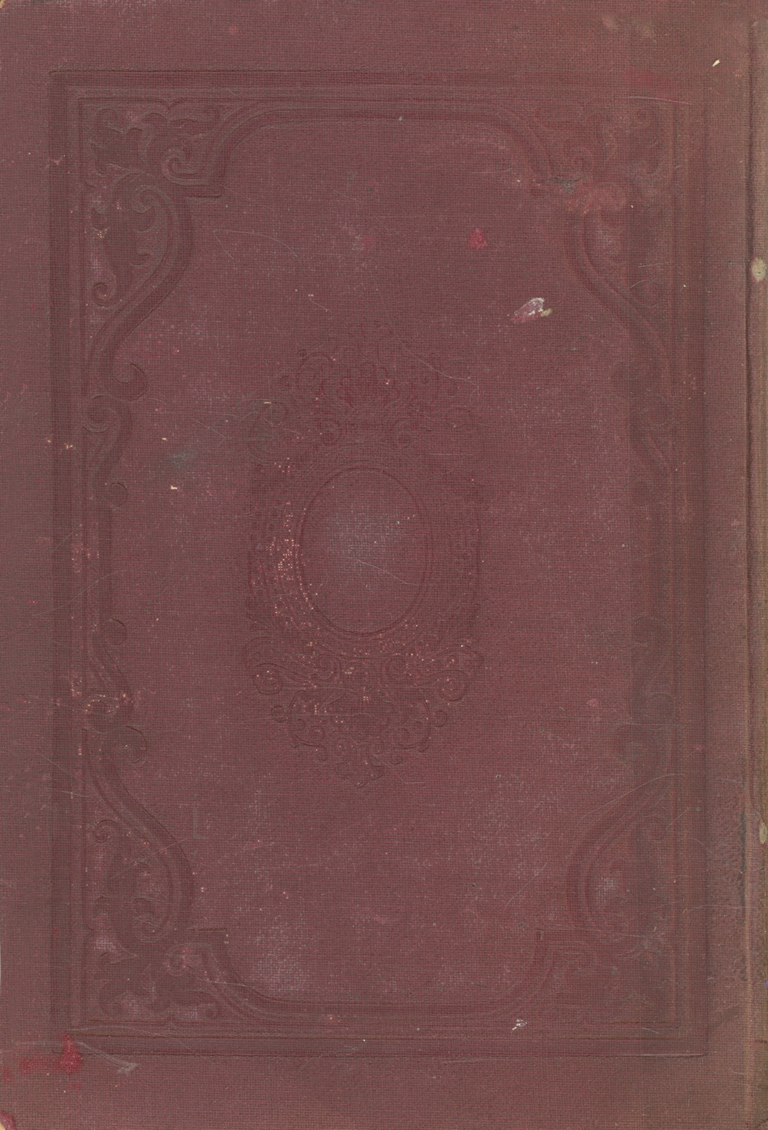


اهداءات ٢٠٠٢

أسرة د/ عبد الرحمن بدوى

د/ عبد الرحمن بدوى للإبداع الثقافي

كتاب

حساب التفاضل والتكامل تأليف حضرة
أحمد أفندى كمال مدرس فرع
الجبريات بمدرسة
المهندسخانة
الخديوية

قد قرر مجلس المعارف الاعلا بجلسته المنعقدة فى يوم الثلاث المبارك الموافق ٤ اكتوبر
سنة ١٨٨١ افرنكية الموافق ١٠ ذى القعدة سنة ١٢٩٨ هجرية لزوم طبع
هذا الكتاب واستعماله لتلامذة مدرسة المهندسخانة الخديوية

(الجزء الاول)

في حساب التفاضل

الطبعة الاولى

(بمطبعة ديوان عموم المعارف بسراى درب الجماميز)

(على صاحبها أفضل الصلاة وأزكى التحية)



بسم الله الرحمن الرحيم

(مقدمة)

(فى اثبات نظرية كثيرة الاستعمال)

بيان يقال ان أى كمية مثل ك متوسطة بين عدة كميات متى كانت هذه الكمية محصورة بين أصغر هذه الكميات وأكبرها أى متى كان الفرقان

$$\text{ه} - \text{ك} \quad , \quad \text{ك} - \text{ر}$$

متحدين فى الاشارة وحرفا ه و ر رمزان أحدهما لأكبر الكميات المعلومة وآخرهما لاصغرها

وللدلالة على الكمية المتوسطة بين جملة كميات معلومة مرموز لها بحروف ح و $\text{ح}'$ و $\text{ح}''$ و ... الخ يكتب هكذا

$$\text{م}(\text{ح} , \text{ح}' , \text{ح}'' , \ldots)$$

نظرية — اذا رمزنا بحروف ح و $\text{ح}'$ و $\text{ح}''$ و ... الخ لكميات مكيفة الاشارات وبحروف د و $\text{د}'$ و $\text{د}''$ و ... الخ لكميات اشاراتها متحدة وعددها كعددها أقول ان

$$\frac{\text{ح}+\text{ح}'+\text{ح}''+\cdots}{\text{د}+\text{د}'+\text{د}''+\cdots}=\text{م}\left(\frac{\text{ح}}{\text{د}} , \frac{\text{ح}'}{\text{د}'} , \frac{\text{ح}''}{\text{د}''} , \ldots\right) \qquad (1)$$

لاننا اذا فرضنا أن ه أكبر النسب $\frac{\text{ح}}{\text{د}}$ و $\frac{\text{ح}'}{\text{د}'}$ و $\frac{\text{ح}''}{\text{د}''}$ و ... وأن ر أصغرها تكون الفروق

ت − ح/د ، ت − حَ/دَ ، ... و ح/د − س ، حً/دً − س ، ...

متحدة الاشارة فاذا ضربنا حدود كل من هذين التتابعين فى د ، دَ ، دً ، ... على التناظر توجد كذلك هذه الكميات المتحدة الاشارة وهى

دت − ح ، دَت − حَ ، ... و ح − دس ، حَ − دَس ، ...

فاذا جمعنا حدود كل تتابع على بعضها وقسمنا كلا من حاصلى الجمع على د+دَ+دً+... يشاهد أن الخارجين

ت − (ح+حَ+حً+...)/(د+دَ+دً+...) ، (ح+حَ+حً+...)/(د+دَ+دً+...) − س

يكونان متحدين فى الاشارة أيضا وبذا تتضح صحة النظرية

نتيجتان — الاولى اذا فرضنا أن د=دَ=دً=...=١ ورمزنا بحرف ه لعدد الكميات ح ، حَ ، حً ، ... يكون

(ح+حَ+حً+...)/ه = م (ح ، حَ ، حً ، ...)

الثانية اذا أخذ القانون (١) وعوضت فيه الحروف ح ، حَ ، حً ، ... بالحواصل حد ، حَدَ ، حًدً ، ... على التناظر (وهذا ممكن) فانه يستخرج منه هذا القانون وهو

حد+حَدَ+حًدً+... = (د+دَ+دً+...) م (ح ، حَ ، حً ، ...)

وحينئذ يكون مجموع حواصل الضرب حد ، حَدَ ، ... مساويا لمجموع العوامل المتحدة الاشارة وهى د ، دَ ، دً ، ... مضروبة فى كمية متوسطة بين العوامل الاخر وهى ح ، حَ ، حً ، ...

(فى المتغيرات والثوابت)

بـ٢د المتغير هو كل كمية تأخذ على التعاقب مقادير مختلفة فى مسئلة واحدة والثابت هو كل كمية تحفظ مقدارا واحدا طول المسئلة المشتغل بها

بـ٣د متى تعلقت مقادير متغير بالمقادير التى يأخذها متغير آخر على حسب قانون ما يقال للمتغير الاول دالة للمتغير الثانى ويتحقق من ان الكميتين اللتين تتغيران معا تكونان دالتين لبعضهما متى علم انه ينتج بكل مقدار يعطى لاحداهما مقدار معين للاخرى ولو لم يعلم الارتباط الواقع بينهما ولا يمكن بيانه بقانون جبرى

بند ٤ يسمى متغيراً غير متعلق كل متغير مقاديره اختيارية
والمتغير الذى يتعين مقداره متى أعطى مقداراً للمتغير الغير المتعلق يكون دائماً دالة لهذا المتغير الغير المتعلق

مثلا مساحة الدائرة دالة لنصف قطرها وزمن الذبذبات الصغيرة للبندول البسيط دالة لطوله

ويمكن ان يكون المتغير دالة لعدة متغيرات غير متعلقة مثلا حجم الاسطوانة القائمة التى قاعدتها دائرة دالة لارتفاعها ولنصف قطر قاعدتها

وعادة يرمز للمتغيرات بالحروف الابجدية و ، ح ، س ، ص ، ع ، ق ، ر وللثوابت بالحروف الابجدية الاخر

وللدلالة على جملة دوال لمتغير واحد مثل س بدون بيان الارتباطات الواقعة بين الدوال والمتغير تستعمل الرموز

$$ى(س) ، ى_١(س) ، ى_٢(س) ، ... الخ$$

أو تستعمل الرموز

$$د(س) ، د_١(س) ، د_٢(س) ، ... الخ$$

ومتى أعطى للمتغير س مقدار مخصوص وليكن ح يستدل على العدد الناتج من تعويض س فى الدالة ى (س) مثلا بالعدد ح بالرمز ى (ح)

وكذا يستدل على الدوال ذات العدة متغيرات س ، ص ، ع ، ... بالرموز

$$ى(س ، ص ، ع ، ...) ، ى_١(س ، ص ، ع ، ...) ، ى_٢(س ، ص ، ع ، ...)$$

، ... الخ أو بالرموز

$$د(س ، ص ، ع ، ...) ، د_١(س ، ص ، ع ، ...) ، د_٢(س ، ص ، ع ، ...) ، ... الخ$$

ويستدل على الناتج الذى يتحصل عليه بتعويض المتغيرات س ، ص ، ع فى الدالة ى (س ، ص ، ع) مثلا بالكميات المعلومة ك ، ل ، م بالرمز ى (ك ، ل ، م)

بند ٥ كل دالة ذات متغير واحد غير متعلق يمكن بيانها بياناً هندسياً
لانه يكفى لاجل ذلك ان يعتبر المتغير الغير المتعلق س افقياً والدالة ص رأسياً للمنحنى المستوى المدلول عليه بالمعادلة

$$ص = ى(س)$$

وعادة

وعادة يكون هذا المنحنى مستمرا أعنى انه متى أعطيت للمتغير س مقادير تختلف عن بعضها اختلافات تكاد ان تكون غير محسوسة تكون مقادير الرأسى ص مختلفة عن بعضها اختلافات تكاد ان تكون غير محسوسة أيضا وفى هذه الحالة يكون المتغير ص دالة مستمرة للمتغير س

ويمكن كذلك بيان الدالة ذات المتغيرين الغير المتعلقين بسطح واما الدوال التى يزيد عدد متغيراتها الغير المتعلقة عن اثنين فلا يمكن بيانها بيانا هندسيا

بند ٦ أقسام الدالة — تنقسم الدالة الى محلولة وغير محلولة فالدالة المحلولة ما كانت مرتبطة بمتغيرها بواسطة معادلة محلولة بالنسبة لهذه الدالة وذلك مثل ص فى المعادلتين

$$\text{ص} = \text{س}^{٢} - ٣\,\text{ء}\,\text{س}^{٤} \quad \text{و}$$

$$\text{ص} = \text{لوجا}\ \text{س}$$

والدالة الغير المحلولة ما كانت مرتبطة بمتغيرها بواسطة معادلة غير محلولة بالنسبة لهذه الدالة وذلك مثل ص فى المعادلتين

$$\text{س}^{٣} + \text{ص}^{٣} - \text{ء}\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ل} = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{ص}\,\text{لو}\,\text{س} + \text{س}\,\text{لو}\,\text{ص} = \text{ح}$$

والدوال المحلولة اما أن تكون جبرية أو عالية فالجبرية ما كانت العمليات التى تجرى على المتغير هى فقط عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة والرفع الى قوى ذات أس ثابت أى غير متعلق بالمتغير واستخراج الجذور وذلك كالدالة ص فى المعادلة

$$\text{ص} = \frac{\text{ح}\,\text{س}^{٣} + \text{ء}\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{هـ}^{٢}\,\text{س}^{٢}}{(\text{هـ} + \text{ء}\,\text{س})^{\frac{٣}{٤}}}$$

والعالية ما لا يمكن أن يستدل عليها بالمتغير الغير المتعلق بواسطة العمليات الستة المذكورة وذلك مثل

$$\text{ح}^{\text{س}} \ ،\ \text{لو}\,\text{س} \ ،\ \text{ظا}\,\text{س}$$

ويقال للدالة الجبرية جذرية متى لم تشتمل على المتغير تحت علامة جذر ولا تحت أس كسرى مثل ص فى المعادلة

$$\text{ص} = \text{س}^{٤}(\text{ح} + \text{ء}\,\text{س}^{٣})^{٥}$$

وفى الحالة العكسية يقال لها غير جذرية وذلك مثل ص فى المعادلتين

$$ص = س + \sqrt{س^٢ - ح^٢} \quad أو \quad ص = س + (س^٢ - ح^٢)^{\frac{١}{٢}} \quad ,$$

$$ص = س^{\frac{٢}{٣}} (ح + ى س^٢)^{\frac{٥}{٧}}$$

والدالة الجذرية اما أن تكون صحيحة واما أن تكون كسرية فالصحيحة ليست الا كمية كثيرة الحدود مثل

$$ص = ح + ى س + هـ س^٢$$

والكسرية ليست الا كسرا حداه كميتان كثيرتا الحدود كالدالة

$$ص = \frac{ح + ى س}{ك + ل س + م س^٢}$$

وماذكرناه بخصوص تقسيم الدوال ذات المتغير الواحد يطبق بدون صعوبة على الدوال ذات المتغيرات المتعددة

(فى طريقة النهايات)

بند ٧ متى قربت المقادير المتتالية لمتغير مثل س شيأ فشيأ من مقدار كمية ثابتة ولتكن ح بحيث ان المقدار المطلق للفرق $س - ح$ يمكن أن يصير أصغر من كل كمية معلومة يقال ان الكمية الثابتة ح نهاية المتغير س

مثلا اذا أعطيت للعدد الصحيح ن مقادير آخذة فى الكبر شيأ فشيأ فان النسبة $\frac{ن+١}{ن}$ تقرب من الواحد قربا لانهائيا لانه يمكن وضع هذه النسبة هكذا

$$١ + \frac{١}{ن}$$

ومتى زيد العدد ن زيادة لانهائية ينتهى الكسر $\frac{١}{ن}$ بأن يكون أقل من كل كسر معلوم أيا ما كان صغره وحينئذ تكون النسبة $\frac{ن+١}{ن}$ كمية متغيرة نهايتها الواحد متى زيد ن الى مالانهاية

وكذا اذا اعتبر التتابع الغير المحدود وهو

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢^٢} + \frac{١}{٢^٣} + \frac{١}{٢^٤} + \cdots$$

وأخذت منه حدود عددها ن مبتدئة بالحد الاول وجمعت على بعضها يشاهد بدون

صعوبة

صعوبة ان هذا المجموع يختلف عن الواحد بكمية تساوى $\frac{1}{ت^٢}$ وهذه الكمية تنتهى بأن تصير أصغر من كل عدد معلوم متى زيد ت الى مالانهاية وحينئذ اذا اعتبرت حدود عددها آخذ فى الازدياد الى مالانهاية يكون مجموعها كمية متغيرة نهايتها الواحد

وكذا مساحة الدائرة نهاية مساحة المضلع المنتظم المرسوم داخلها الذى يزيد عدد اضلاعه الى مانهاية

وكذا العدد الاصم ليس الا نهاية الكسور التى تقرب مقاديرها شيأ فشيأ من هذا العدد الاصم

وكذا اذا اعتبر قوس وجيبه فان النسبة $\frac{جا س}{س}$ التى هى أصغر من الواحد دائما يمكن أن لا تفترق عنه الا بكمية صغيرة بقدر ما يراد اذا أعطى للتغير س مقادير تأخذ فى الصغر شيأ فشيأ وحينئذ تكون النسبة $\frac{جا س}{س}$ كمية متغيرة نهايتها الواحد

بـ ٨ ـد *(تنبيه)* يمكن أن تكون الكمية المتغيرة أصغر من نهايتها وذلك كالنسبة $\frac{جا س}{س}$ متى أعطى للقوس س مقادير تأخذ فى الصغر شيأ فشيأ ويمكن أن تكون أكبر من نهايتها وذلك كالنسبة $\frac{ت+١}{ت}$ متى أعطى للعدد الصحيح ت مقادير آخذة فى الكبر شيأ فشيأ بل يمكن ان تكون تارة أكبر وتارة أصغر من نهايتها مثلا اذا أعطى لحرف س مقادير تتغير من ابتداء الصفر الى مالانهاية تمر الدالة

$$ص = \frac{جا س}{س}$$

بسلسلة مقاديره وجبة وسالبة على التعاقب ومع ذلك فان نهاية هذه الدالة صفر

بـ ٩ ـد طريقة النهايات مؤسسة على هذه القاعدة البديهية وهى متى كان متغيران متساويين فى جميع الدرجات المتتالية التى يمران بها ومال احدهما الى نهاية ما فان الآخر يميل أيضا الى هذه النهاية

ومن هذه القاعدة تنتج هذه النظرية الاساسية وهى

لنعتبر معادلة طرفاها دالتان لمتغيرات س و ص و ع و ... ولتكن

$$د(س و ص و ع و ...) = د_١(س و ص و ع و ...)$$

ولنفرض ان المتغيرات س و ص و ع و ... تميل الى النهايات ك و ل و م و ... بالتناظر فتكون نهايتا الدالتين د(س و ص و ع و ...) و د$_١$(س و ص و ع و ...) هما د(ك و ل و م و ...) و د$_١$(ك و ل و م و ...)

وبموجب القاعدة السالفة الذكر تكون هاتان النهايتان متساويتين أعنى أن

$$د(ك ، ل ، م ، ...) = د_{1}(ك ، ل ، م ، ...)$$

يعنى ان الارتباط الواقع بين المتغيرات س ، ص ، ع ، ... يكون واقعا بعينه بين نهاياتها وهى ك ، ل ، م ، ... وانه يكفى لاجل الحصول على الارتباط الواقع بين هذه النهايات ان يعوض كل متغير بنهايته

(تنبيه) الاثبات السابق هو بفرض ان الدالتين د (س ، ص ، ع ، ...) و د₁(س ، ص ، ع ، ...) تقرباً قرباً لانهائياً من المقدارين د(ك ، ل ، م ، ...) و د₁(ك ، ل ، م ، ...) متى مالت المتغيرات س ، ص ، ع ، ... من نهاياتها وهى ك ، ل ، م ، ... وهذه هى على العموم خاصية الدوال المستعملة فى التحليل الجبرى فاذا لم تقع هذه الخاصية فى حالة خصوصية لا يمكن تطبيق النظرية المتقدمة

والنظرية السابقة هى المؤسسة عليها طريقة النهايات وهى

لاجل ايجاد الارتباط الواقع بين جملة كميات تكون كيفية مقارنتها ببعضها مباشرة غير معلومة تعتبر هذه الكميات نهايات لكميات اخرى متغيرة يمكن بالسهولة مقارنتها ببعضها ثم يبحث حينئذ عن الارتباط الواقع بين هذه الكميات المتغيرة وبواسطة النظرية المتقدمة يستخرج منه مباشرة الارتباط الواقع بين نهاياتها أعنى الواقع بين الكميات المراد مقارنتها ببعضها

مثلا لنفرض ان المطلوب البحث عن الارتباط الواقع بين حجم اسطوانة قائمة قاعدتها دائرة وبين قاعدتها وارتفاعها فلذلك نرمز بحرف ح لحجم هذه الاسطوانة وبحرف ق لمساحة قاعدتها وبحرف ع لارتفاعها ثم نرسم داخل القاعدة مضلعا منتظما عدد اضلاعه حيثما اتفق ولتكن قَ مساحة هذا المضلع ، حَ المساحة الجسمية للمنشور القائم الذى قاعدته المضلع المذكور وارتفاعه ارتفاع الاسطوانة فيكون

$$حَ = قَ ع$$

فاذا زيد عدد اضلاع المضلع الى مالانهاية تكون نهايتا قَ ، حَ اللتين هما قاعدة المنشور وحجمه هما الكميتان ق ، ح اللتان هما قاعدة الاسطوانة وحجمها أعنى أن

$$نهاقَ = ق \quad ، \quad نهاحَ = ح$$

وبموجب النظرية المتقدمة نستنتج من المعادلة السابقة هذه المعادلة

$$ح = ق ع \ .$$

وبذلك

وبذلك يتحصل بواسطة النهايات على الارتباط الواقع بين الكميات ح ، ء ، ع الغير الممكن مقارنتها ببعضها مباشرة

مثال آخر — يثبت بالهندسة التحليلية ان شرط تعامد مستقيمين يكون مبينا بهذه المعادلة

$$١ + ءءَ + (ء + ءَ) \text{جتاو} = ٠$$

التى فيها حرف و رمز للزاوية الواقعة بين المحورين الاحداثيين وحرفا ء ، ءَ الداخلان فيها رمزان للعاملين الزاويين للمستقيمين لكن هذه المعادلة لا تناسب الحالة التى يكون فيها احد المستقيمين موازيا بالمحور الصادات اذ أن معامله الزاوى ء يصير لانهائيا وحينئذ كان يلزم أن يحسب مباشرة المعامل م للمستقيم العمود على الاول لكن بواسطة طريقة النهايات يمكن استخراج هذا المعامل وهو م من المعادلة المتقدمة ولذلك نضعها فى أول الامر بالصورة

$$\frac{١}{ء} + ءَ + (١ + \frac{ءَ}{ء}) \text{جتاو} = ٠$$

ثم نتصور أن المستقيم الاول يقرب شيأ فشيأ من أن يصير موازيا بالمحور الصادات فيقرب الثانى شيأ فشيأ من ان يصير عمودا عليه وتكون نهاية ءَ هى م وتكون نهاية $\frac{١}{ء}$ ، $\frac{ءَ}{ء}$ صفرا فاذا عوض كل متغير بنهايته يحدث

$$م + \text{جتاو} = ٠ \quad \text{أو} \quad م = - \text{جتاو}$$

(فى الكميات الصغيرة جدا والكميات الكبيرة جدا أو اللانهائية)

بند الكمية الصغيرة جدا هى كل كمية متغيرة نهايتها الصفر فعلى هذا يكون الفرق بين أى كمية متغيرة ونهايتها كمية صغيرة جدا

والكمية الكبيرة جدا أو اللانهائية هى كل كمية متغيرة تأخذ مقادير متزايدة الى ما لانهاية بحيث تنتهى بأن تكون أكبر من كل كمية معلومة وكل كمية لانهائية تبين بالرمز ∞ مثلا الكسر

$$ص = ء + \frac{ء^٢}{س - ء}$$

يصير لانهائيا حينما يكون س = ء

*(في الرتب المختلفة للكميات الصغيرة جدًا

٨ ـ اذا متى اعتبرت جملة كميات صغيرة جدًا يتعلق بعضها بالبعض الآخر تنتخب منها كمية صغيرة جدًا تسمى بالصغيرة جدًا الاصلية وتقارن بها الكميات الصغيرة جدًا الاخرى ولنبين كيفية المقارنة فنقول

لتكن ل الصغيرة جدًا الاصلية ولتكن ى صغيرة جدًا ثانية فيكون نهال = ٠ و نهاى = ٠ فاذا مالت النسبة $\frac{ى}{ل}$ الى نهاية محدودة مخالفة للصفر ولتكن ك بحيث يكون

$$\frac{ى}{ل} = ك + ف$$

(ف صغيرة جدًا) يقال ان ى صغيرة جدًا برتبة أولى ومن القانون المتقدم يستنتج أن

$$ى = ل\ (ك + ف)$$

وهذا هو المقدار الجبري العمومي للكميات الصغيرة جدًا التي برتبة أولى

فاذا كانت النسبة $\frac{ى}{ل}$ صغيرة برتبة أولى يقال إن ى صغيرة جدًا برتبة ثانية وبهذا الفرض يكون

$$\frac{ى}{ل} = ل\ (ك + ف)$$

ويكون

$$ى = ل^{٢}\ (ك + ف)$$

وهذا هو المقدار الجبري العمومي للكميات الصغيرة جدًا التي برتبة ثانية وحرف ك الداخل فيه رمز لكمية محدودة معينة مخالفة للصفر وحرف ف الداخل فيه رمز لكمية صغيرة جدًا

وعلى العموم يقال إن ى صغيرة جدًا برتبة ه اذا كانت النسبة $\frac{ى}{ل}$ صغيرة جدًا برتبة ه ـ ١ فاذا فرض أن

$$ل^{ه-١}\ (ك + ف)$$

هو المقدار الجبري العمومي للكميات الصغيرة جدًا التي برتبة ه ـ ١ يكون

$$\frac{ى}{ل} = ل^{ه-١}\ (ك + ف)$$

ويكون

$$ى = ل^{ه}\ (ك + ف)$$

ويستنتج

ويستنتج من ذلك ان هذا القانون يشمل المقدار الجبري العمومي للكميات الصغيرة جدًا التي برتبة ت مهما كان العدد الصحيح ت ويجب أن يتنبه الى ان حرف ك الداخل في هذا القانون رمز لكمية محدودة معينة مخالفة للصفر والى ان حرف ف الداخل فيه رمز لكمية صغيرة جدًا

وبموجب ما تقدم يمكن أن يقال أيضا إن رتبة أي كمية صغيرة جدًا مثل ے هي الاس ت للقوة التي يلزم رفع الصغيرة جدًا الاصلية وهي لـ اليها لتحصل نسبة $\frac{ے}{لـ^{ت}}$ تكون نهايتها كمية محدودة معينة مخالفة للصفر وهذا التعريف يشمل الحالة التي لا يكون فيها ت عددا صحيحا

أمثلة — اذا جعل القوس سه صغيرة جدًا أصلية يكون جاسه صغيرة جدًا برتبة أولى وتكون الكمية ۱ — جتاسه صغيرة جدًا برتبة ثانية وتكون الكمية سه — جاسه صغيرة جدًا برتبة ثالثة

(في طريقة الصغيرات جدًا)

بند ۱۲ الصغيرات جدًا كميات مساعدة تستعمل لاجل تسهيل حساب الكميات المحدودة وذلك أن تعتبر الكمية التي يبحث عنها نهاية النسبة الكائنة بين صغيرتين جدًا ثم يبحث عن مقدار هذه النهاية أو تعتبر الكمية التي يراد حسابها محللة الى أجزاء صغيرة جدا متساوية أو غير متساوية كل منها يميل الى الصفر اذا زيد عددها الى مالانهاية ثم يقدر كل جزء من هذه الاجزاء ويبحث عن النهاية التي يميل اليها المجموع متى زيد عددها الى مالانهاية

وطريقة الصغيرات جدا تنحصر في هاتين النظريتين وهما

بند ۱۳ النظرية الاولى — نهاية النسبة الكائنة بين صغيرتين جدا لا تتغير اذا عوضت هاتان الصغيرتان جدا بصغيرتين جدا أخريين بشرط أن تكون نهاية النسبتين الواقعتين بين هاتين الاخريين والاوليين بالتناظر هي الواحد

لاننا اذا فرضنا ان لـ ، ے هما الصغيرتان جدا المفروضتان وأن لَ ، ےَ صغيرتان جدا آخريان بحيث ان

$$نها \frac{لَ}{لـ} = ۱ \quad , \quad نها \frac{ےَ}{ے} = ۱$$

يكون $\frac{ل'}{ل}=١+ف$ ، $\frac{ى'}{ى}=١+ف'$

وحرفا ف ، ف' رمزان لكميتين صغيرتين جدا

ومن هنا يستخرج

$$ل'=ل(١+ف) \quad ، \quad ى'=ى(١+ف')$$

واذن يكون

$$\frac{ل'}{ى'}=\frac{ل}{ى}\times\frac{١+ف}{١+ف'}$$

وحيث ان نهاية $\frac{١+ف}{١+ف'}$ هى الواحد بداهة فيكون

$$نها\frac{ل'}{ى'}=نها\frac{ل}{ى}$$

وهو المطلوب اثباته

ويمكن النطق بهذه النظرية بكيفية أخرى بواسطة هذه النظرية وهى

متى كانت نهاية النسبة الكائنة بين صغيرتين جدا هى الواحد يكون الفرق بينهما كمية صغيرة جدا بالنسبة لكلتيهما لانه اذا كان

$$نها\frac{ل'}{ل}=١ \quad يكون \quad \frac{ل'}{ل}=١+ف$$

وحرف ف رمز لكمية صغيرة جدا ومن هنا ينتج أن

$$\frac{ل'-ل}{ل}=ف \quad ، \quad \frac{ل'-ل}{ل'}=\frac{ف}{١+ف}$$

وبالعكس كلتا هاتين المتساويتين الاخيرتين تؤدى الى أن $نها\frac{ل'}{ل}=١$

وينتج من ذلك انه يمكن النطق بالنظرية بأن يقال ان نهاية النسبة الكائنة بين أى صغيرتين لا تتغير اذا زيدت أو نقصت كلتاهما بكمية صغيرة جدا بالنسبة لها

مثال — اذا كان القوس س صغيرة جدا ورمز بحرفى م ، ه لكميتين ثابتتين تكون الكميتان جا م س ، جا ه س صغيرتين جدا وغير ذلك فان نهاية نسبتيهما الى القوسين م س ، ه س هى الواحد وحينئذ يكون

$$نها\frac{جا م س}{جا ه س}=نها\frac{م س}{ه س}=\frac{م}{ه}$$

بند ١٤ النظرية الثانية — لتكن

$$ل_١ ، ل_٢ ، ل_٣ ، ... ، ل_م$$

صغيرات

صغيرات جدا موجبة يزيد عددها وهو م الى ما لا نهاية فاذا كان مجموع هذه الصغيرات جدا مساويا بالكمية معينة ولتكن ع أو اذا كان هذا المجموع متغيرا ويميل الى النهاية ع وكانت الكميات

$$\text{ف}_{1}\ ،\ \text{ف}_{2}\ ،\ \text{ف}_{3}\ ،\ \cdots\ ،\ \text{ف}_{\text{م}}$$

صغيرات جدا أقول إن

$$\text{ل}_{1}\text{ف}_{1}+\text{ل}_{2}\text{ف}_{2}+\text{ل}_{3}\text{ف}_{3}+\cdots+\text{ل}_{\text{م}}\text{ف}_{\text{م}}$$

يميل الى الصفر أي يكون صغيرة جدا

لاننا اذا رمزنا بحرف ف لاكبر الصغيرات جدا وهي $\text{ف}_{1}\ ،\ \text{ف}_{2}\ ،\ \text{ف}_{3}\ ،\ \cdots\ \text{ف}_{\text{م}}$ في المقدار المطلق يكون المقدار المطلق للمجموع $\text{ل}_{1}\text{ف}_{1}+\text{ل}_{2}\text{ف}_{2}+\text{ل}_{3}\text{ف}_{3}+\cdots+\text{ل}_{\text{م}}\text{ف}_{\text{م}}$ اقل من $(\text{ل}_{1}+\text{ل}_{2}+\text{ل}_{3}+\cdots+\text{ل}_{\text{م}})\,\text{ف}$ لكن هذا الحاصل كمية صغيرة جدا حيث ان نهاية العامل الاول كمية محدودة والعامل ف كمية صغيرة جدا فحينئذ يكون المجموع

$$\text{ل}_{1}\text{ف}_{1}+\text{ل}_{2}\text{ف}_{2}+\text{ل}_{3}\text{ف}_{3}+\cdots+\text{ل}_{\text{م}}\text{ف}_{\text{م}}$$

كمية صغيرة جدا

نتيجة — نهاية مجموع كميات صغيرة جدا لا نهاية لعددها لا يتغير متى عوضت هذه الكميات بصغيرات جدا أخرى نهاية النسب الكائنة بين هذه الصغيرات الاخيرة والاولى بالتناظر هي الواحد

ولاثبات ذلك نفرض ان

$$\text{ل}_{1}\ ،\ \text{ل}_{2}\ ،\ \text{ل}_{3}\ ،\ \cdots\ ،\ \text{ل}_{\text{م}}$$

هي الصغيرات جدا المفروضة وأن

$$\text{ے}_{1}\ ،\ \text{ے}_{2}\ ،\ \text{ے}_{3}\ ،\ \cdots\ ،\ \text{ے}_{\text{م}}$$

صغيرات جدا أخرى نهاية نسبها الى الاولى بالتناظر هي الواحد فيكون

$$\frac{\text{ے}_{1}}{\text{ل}_{1}}=1+\text{ف}_{1}\ ،\ \frac{\text{ے}_{2}}{\text{ل}_{2}}=1+\text{ف}_{2}\ ،\ \cdots\ ،\ \frac{\text{ے}_{\text{م}}}{\text{ل}_{\text{م}}}=1+\text{ف}_{\text{م}}$$

أو

$$\text{ے}_{1}=\text{ل}_{1}+\text{ل}_{1}\text{ف}_{1}\ ،\ \text{ے}_{2}=\text{ل}_{2}+\text{ل}_{2}\text{ف}_{2}\ ،\ \cdots\ ،\ \text{ے}_{\text{م}}=\text{ل}_{\text{م}}+\text{ل}_{\text{م}}\text{ف}_{\text{م}}$$

وبموجب النظرية يعلم انه اذا كان

$$\text{نها}\left(د_{١}+د_{٢}+د_{٣}+\cdots+د_{م}\right)=ع$$

يكون

$$\text{نها}\left(د_{١}ف_{١}+د_{٢}ف_{٢}+د_{٣}ف_{٣}+\cdots+د_{م}ف_{م}\right)=٠$$

وحينئذ يكون

$$\text{نها}\left(ى_{١}+ى_{٢}+ى_{٣}+\cdots+ى_{م}\right)=ع$$

وهو المطلوب اثباته

الباب الاول

(فى طرق حساب التفاضلات)

الفصل الاول

(فى خواص مشتقات وتفاضلات الدوال ذات المتغير الواحد)

(فى أصل حساب التفاضل)

بند ١ قد توصل الى كشف حساب التفاضل حين البحث عن طريقة عمومية لرسم مماسات المنحنيات المعلومة بمعادلاتها فلنتصور متغيرين وليكونا س , ص مرتبطين ببعضهما ارتباطا أيا ما كان بحيث ان أحدهما يكون دالة للآخر ولنعتبر هذين المتغيرين احداثيين لنقطة منسوبة الى محورين قائمين مرسومين فى مستو ثم نرسم المنحنى ام ب (شكل ١) الذى معادلته هى ص = د(س) ونفرض ان هذا المنحنى حقيقى فى امتداد ما ونفرض ان المطلوب رسم المستقيم المماس له فى النقطة م التى احداثياها س , ص فيعرف المماس عادة بانه هو النهاية التى يميل اليها قاطع متى تحرك هذا القاطع حول نقطة من نقط تقاطعه بالمنحنى بحيث تقرب نقطة تقاطع أخرى قربا لانهائيا من الاولى وحينئذ لتكن مَ نقطة ثانية من المنحنى احداثياها س + ح , ص + ك ولنعتبر القاطع مَ م ع والمماس م ر الذى هو نهايته فمن المثلث مَ م ه يحدث

ظا مَ م ه = مَ ه / م ه = ك / ح

واذن يكون

$$ظا ٮ م ط = نها ظا ٮ م ه = نها \frac{ك}{ح}$$

حينما يميل ح الى الصفر

ويعلم من ذلك انه اذا بحث عن نهاية النسبة الكائنة بين الزيادتين ك , ح اللتين هما زيادتا المتغيرين ص , س المرتبطتين ببعضهما بواسطة المعادلة

$$ص + ك = د(س + ح)$$

متى نقص ح الى ان يؤل الى الصفر يتحصل الظل المماسى للزاوية التى يكونها المستقيم المماس للمنحنى فى نقطة م مع محور السينات

(فى بيان الغرض من حساب التفاضل والدالة المشتقة)

بند ١٦ الغرض من حساب التفاضل تعيين نهاية النسبة الكائنة بين زيادة أى دالة وزيادة متغيرها متى نقصت هذه الزيادة الثانية الى ان تؤل الى الصفر وهذه النهاية التى تتعلق بالمقدار الذى يعطى للمتغير س ولا تتعلق بالزيادة ح تسمى مشتقة الدالة المفروضة ويرمز لهذه المشتقة بالرمز صَ أو بالرمز دَ (س)

ولنبحث عن مشتقات بعض دوال بسيطة فنقول

أولا لتكن الدالة

$$ص = س^{م}$$

(حرف م رمز لعدد صحيح موجب) فاذا زيد س زيادة مّا ح يؤل س , ص الى س + ح , ص + ك على التناظر ويكون

$$ص + ك = (س + ح)^{م}$$

واذن يكون

$$ك = (س + ح)^{م} - س^{م}$$

أو

$$ك = م س^{م-١} ح + \frac{م(م-١)}{١ \times ٢} س^{م-٢} ح^{٢} + \cdots + ح^{م}$$

ومن هنا يكون

$$\frac{ك}{ح} = م س^{م-١} + \frac{م(م-١)}{١ \times ٢} س^{م-٢} ح + \cdots + ح^{م-١}$$

فتتركب

فتتركب النسبة $\frac{ك}{ح}$ من جزءين أحدهما لا يتعلق بالزيادة ح والآخر يحتوى على ح عاملا مشتركا بحيث انه اذا تناقص ح الى أن يؤل الى الصفر يمكن أن يصير هذا الجزء الثانى صغيرا بقدر ما يراد واذن يكون

$$نها\frac{ك}{ح}=م\,س^{م-1}$$

وحينئذ يكون

$$صَ=م\,س^{م-1}$$

ويمكن أيضا أن يحصل على هذه المشتقة بدون استعمال قانون نوتون . ولذلك نضع

$$س+ح=س_{1}$$

فيكون

$$ك=س_{1}^{م}-س^{م}$$

وبملاحظة ان $ح=س_{1}-س$ يستنتج ان

$$\frac{ك}{ح}=\frac{س_{1}^{م}-س^{م}}{س_{1}-س}=س_{1}^{م-1}+س_{1}^{م-2}س+\cdots+س_{1}س^{م-2}+س^{م-1}$$

ومتى تناقصت الزيادة ح الى ان آلت الى الصفر يقرب $س_{1}$ قربا لانهائيا من س ولكون ان الطرف الاخير يحتوى على حدود عددها م يؤل كل منها الى $س^{م-1}$ متى مر الى النهاية فيكون

$$نها\frac{ك}{ح}=م\,س^{م-1}$$

أعنى ان

$$صَ=م\,س^{م-1}$$

وثانيا لتكن الدالة

$$ص=\frac{1}{س^{م}}=س^{-م}$$

(وحرف م رمز لعدد صحيح موجب) فيكون

$$ص+ك=\frac{1}{(س+ح)^{م}}$$

ويكون

$$ك=\frac{1}{(س+ح)^{م}}-\frac{1}{س^{م}}=\frac{س^{م}-(س+ح)^{م}}{س^{م}(س+ح)^{م}}$$

وبالتحليل والقسمة على ح يحدث

$$\frac{ك}{ح}=\frac{-م\,س^{م-1}-\frac{م(م-1)}{1\times 2}س^{م-2}ح-\cdots}{س^{م}(س+ح)^{م}}$$

وبالمرور الى النهاية يحدث

$$نها\ \frac{ك}{ح}=-\frac{م\,س^{م-1}}{س^{2م}}=-\frac{م}{س^{م+1}}$$

وحينئذ يكون

$$ص'=-\frac{م}{س^{م+1}}=-م\,س^{-م-1}$$

فيشاهد أن القاعدة التي يتحصل بها على مشتقة $س^{م}$ متى كان م عددا صحيحا تطبق مهما كانت اشارة م

وثالثا لتكن الدالة $ص=\sqrt{س^{2}-ح^{2}}$

فيكون $ك=\sqrt{(س+ح)^{2}-ح^{2}}-\sqrt{س^{2}-ح^{2}}$

وبناء على ذلك يكون

$$\frac{ك}{ح}=\frac{\sqrt{(س+ح)^{2}-ح^{2}}-\sqrt{س^{2}-ح^{2}}}{ح}$$

فاذا جعل ح=٠ يوجد الطرف الثاني بالصورة $\frac{0}{0}$ فلاجل الحصول على مقداره الحقيقي يضرب حدا الكسر الموجود في الطرف الثاني في مجموع الجذرين اللذين يشتمل البسط على فرقهما فيحدث

$$\frac{ك}{ح}=\frac{(س+ح)^{2}-س^{2}}{ح\left[\sqrt{(س+ح)^{2}-ح^{2}}+\sqrt{س^{2}-ح^{2}}\right]}$$

أو

$$\frac{ك}{ح}=\frac{2س+ح}{\sqrt{(س+ح)^{2}-ح^{2}}+\sqrt{س^{2}-ح^{2}}}$$

وحينئذ

وحينئذ يكون

$$نها \frac{ك}{ح} = \frac{٢ س}{٢ \sqrt{س^٢ - د^٢}} = \frac{س}{\sqrt{س^٢ - د^٢}}$$

أعنى ان

$$صَ = \frac{س}{\sqrt{س^٢ - د^٢}}$$

وقد وجدنا مشتقات الدوال المتقدمة بكيفية سريعة وسهلة لكن الطرق التى استعملناها لا تكفى اذا أريد ايجاد مشتقات دوال أكثر تركيبا والذى يوصل الى ذلك هو علم حساب التفاضل

(فى التفاضل)

بعد لتكن الدالة

$$ص = د(س)$$

ولنعط للمتغير س زيادة حيثما اتفق ولتكن ح سواء كانت موجبة أو سالبة ولتكن ك الزيادة التى تزيد بها الدالة ص فيكون

$$ص + ك = د(س + ح)$$

وحيث ان نها $\frac{ك}{ح}$ = صَ فيجب أن يكون

$$\frac{ك}{ح} = صَ + ل$$

وحرف ل رمز لكمية تتعلق بكميتى س و ح وتميل الى الصفر حينما يميل ح الى الصفر ومن ذلك ينتج أن

$$ك = صَ ح + ل ح$$

فتتركب الزيادة ك التى هى زيادة الدالة من جزءين متميزين أولهما وهو صَ ح حاصل ضرب مشتقة الدالة فى زيادة المتغير الغير المتعلق وهذا الحاصل يسمى تفاضل الدالة ص ويرمز له بالرمز فاص بحيث يكون

$$فاص = صَ ح = دَ(س) ح$$

وثانى الجزءين هو حاصل ضرب ح فى كمية ل تنعدم حينما ينعدم ح ولا يشتغل بهذا الجزء

وتفاضل المتغير الغير المتعلق ليس الا الزيادة ح لاننا اذا اعتبرنا الدالة

$$ص = س$$

يكون ص + ك = س + ح

وإذن يكون

ك = ح

ويكون

ك/ح = ١

ويعلم من ذلك ان مشتقة س هى ١ واذن يكون التفاضل

فاص أو فاس = ١ × ح = ح

وبناء على ذلك يمكن كتابة القانون

فاص = صَ ح

هكذا فاص = صَ فاس

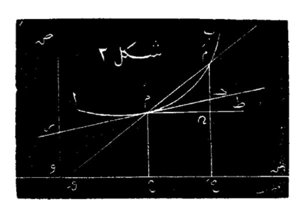
أعنى ان تفاضل أى دالة يساوى حاصل ضرب مشتقتها فى تفاضل متغيرها الغير المتعلق وليس تفاضل المتغير الغير المتعلق الا الزيادة الاختيارية التى تعطى له

ومن هذا القانون الاخير يستنتج أن

صَ = فاص / فاس

أعنى ان مشتقة أى دالة ذات متغير واحد هى خارج قسمة تفاضل هذه الدالة على تفاضل متغيرها ولذا تسمى المشتقة كذلك نسبة تفاضلية أو خارجا تفاضليا

بند ١٧ يمكن بيان التفاضل بيانا هندسيا لاننا اذا فرضنا ان ام ب (شكل ٢) المنحنى المبين بالمعادلة



ص = د(س)

يكون

ظا ےمه = نها ك/ح = صَ

لكن

ےه = مه ظا ےمه

فاذن يكون

ےه = صَ ح = فاص

وحينئذ يكون ےه دالا على التفاضل اذا كان مه = ح = فاس

ويشاهد

ويشاهد من ذلك ان فاس , فاص هما الزيادتان المتناظرتان للمتغيرين سَ , صَ متى مرّ من نقطة التماس م الموجودة على المنحنى الى نقطة حيثما اتفق ى من المماس بخلاف ك أو مَ هـ فانها هي الزيادة التي يزيد بها رأسي المنحنى متى زيد افقيه زيادة قدرها ح=فاس

بند ١٨ نهاية النسبة الكائنة بين زيادة أي دالة وتفاضلها تساوي الواحد بشرط ان لا تكون مشتقة هذه الدالة معدومة لانه من المعادلة

$$\frac{ك}{ح}=صَ+ل$$

يستخرج

$$ك=(صَ+ل)ح$$

وقد علم أن

$$فاص=صَ ح$$

فاذن يكون

$$\frac{ك}{فاص}=\frac{صَ+ل}{صَ}=١+\frac{ل}{صَ}$$

وحينئذ اذا لم تكن صَ معدومة يكون

$$نها\ \frac{ك}{فاص}=١$$

(في خواص المشتقات والتفاضلات)

بند ١٩ الارتباط

$$ك=(صَ+ل)ح$$

يوصل الى جملة نتائج نذكرها فنقول

لنعط للمتغير س مقدارا معينا فينتج للمشتقة وهي صَ مقدار معين كذلك ثم اذا اعطى للمتغير س زيادة صغيرة جدا تكون اشارة صَ+ل عين اشارة صَ حيث ان ل يمكن ان يصير صغيرا بقدر ما يراد وحينئذ تكون اشارة الزيادة ك عين اشارة صَ ح وحيث ان ح يؤخذ موجبا فتكون اشارة ك عين اشارة صَ وحينئذ اذا كانت المشتقة صَ موجبة تكون الزيادة ك موجبة بمعنى ان الدالة تكون متزائدة واذا كانت صَ سالبة تكون الدالة متناقصة فيعلم من ذلك ان أي دالة تكون متزائدة

أو متناقصة بالابتداء من المقدار الذي يكون لها حينما يعطى للمتغير سه مقدار معين على حسب ما تكون مشتقتها موجبة أو سالبة بمقدار سه المذكور

وينتج من ذلك انه اذا بقيت مشتقة أي دالة موجبة على الدوام متى تغير سه بالابتداء من مقدار وليكن ح الى مقدار آخر وليكن ء فان هذه الدالة تكون متزائدة على الدوام والاستمرار بمقادير سه المحصورة بين العددين ح ، ء ويكون الامر بالعكس اذا كانت المشتقة سالبة

مثلا لنأخذ الدالة

$$\text{صه} = \tfrac{1}{3}\,\text{سه}^{3} - 2\,\text{سه}^{2} + 3\,\text{سه} + 1$$

ولنعتبر المنحنى المبين بهذه المعادلة

فحينما يكون سه = ٠ يكون صه = ١

وحينما يكون سه = ١ يكون صه = $2\tfrac{1}{3}$

وحينما يكون سه = ٢ يكون صه = $1\tfrac{2}{3}$

وحينما يكون سه = ٣ يكون صه = ١

وحينما يكون سه = −١ يكون صه = $-4\tfrac{1}{3}$

فاذا رسمت هذه النقط المختلفة يعلم أن المنحنى يكون تقريبا بالصورة م مَ مً (شكل ٣) لكن اذا أريد معرفة مقادير سه التي تجعل الرأسي متزائدا او متناقصا يؤخذ مشتقة صه فيوجد أن

$$\text{صَه} = \text{سه}^{2} - 4\,\text{سه} + 3 = (\text{سه} - 1)(\text{سه} - 3)$$

وحينئذ يشاهد انه اذا زيد سه من ٠ الى ١ تكون المشتقة صَه موجبة وحينئذ يكون الرأس صه متزائدا بالابتداء من نقطة مَ الى نقطة مً وفى نقطة مً التي أفقيها سه = ١ يكون صَه = ٠ أعنى ان المماس فى هذه النقطة موازٍ لمحور السينات ثم اذا زيد سه من ١ الى ٣ تصير المشتقة صَه سالبة وحينئذ يكون الرأسي متناقصا بالابتداء من نقطة مً الى نقطة مٍ وحيث ان صَه = ٠ حينما يكون سه = ٣ فيكون المماس فى هذه النقطة الاخيرة موازيا أيضا لمحور السينات

ثم اذا أعطيت للمتغير سه مقادير تأخذ فى الازدياد بالابتداء من ٣ تكون المشتقة صَه

موجبة

موجبة دائما وحينئذ يكون رأسي المنحنى متزائدا دائما بالابتداء من نقطة م فإذا
أعطي للمتغير س مقدار سالب تكون المشتقة صَ موجبة مهما كان هذا المقدار
السالب و بناء على ذلك تكون المقادير التي تنتج للرأسي آخذة في الازدياد أيضا حينما
يعطى للأفقي س مقادير سالبة وينبغي ان يتنبه الى ان الكمية السالبة تزيد متى نقص
مقدارها المطلق

بند ١٢ ويستنتج من القانون

ك = (صَ + ل) ح

انه اذا كانت مشتقة دالة معدومة بجميع مقادير المتغير س المحصورة بين عددين
وليكونا ح و ء يكون مقدار هذه الدالة ثابتا بجميع المقادير المذكورة (ح عدد
مفروض أكبر من ء)
لانه حيث كانت نها ك/ح = ٠ فرضا فلو أعطي للمتغير س مقدار محصور بين ح و ء
يكون المقدار المطلق للنسبة ك/ح د ف بشرط ان يكون ح صغيرا صغرا كافيا (وحرف
ف رمز لكمية معينة يمكن أخذها صغيرة بقدر ما يراد) ومن هنا يستنتج ان ك د ف ح
اذا تقرر هذا واعتبرنا الآن مقدارين حيثما اتفق من مقادير س المحصورة بين العددين
ح و ء وليكونا س١ و س٢ أقول ان مقداري ص المناظرين لهما وليكونا ص١ و ص٢
يكونان متساويين لاننا لو أعطينا للمتغير س مقادير محصورة بين س١ و س٢ ومتزائدة
زيادات متساوية كانت أو غير متساوية لكنها صغيرة صغرا كافيا بحيث انه بكل منها
يكون ك د ف ح (ك مأخوذة موجبة) نحصل على جملة متباينات صورتها كصورة
المتباينة المتقدمة ولو أضفنا هذه المتباينات على بعضها انتج ان مجموع الزيادات المتتالية
للدالة ص مأخوذة جميعها موجبة أصغر من مجموع حواصل الضرب ف ح أعني أصغر
من حاصل ضرب الكمية ف في مجموع زيادات المتغير س وهو س٢ ــ س١ وحينئذ
بالاولوية يكون مجموع الزيادات المتتالية للدالة مأخوذة باشاراتها وهو ص٢ ــ ص١
أصغر من ف (س٢ ــ س١) واذن يكون

ص٢ ــ ص١ د ف (س٢ ــ س١)

وحيث انه يمكن جعل الكمية ف صغيرة بقدر ما يراد فيصير الفرق ص٢ ــ ص١ أصغر

من كل كمية معلومة أعنى يصير معدوما وحينئذ يكون

$$ص_٢ - ص_١ = ٠$$

أو

$$ص_٢ = ص_١$$

وحينئذ تكون الدالة ص حافظة لمقدار واحد بجميع مقادير س المحصورة بين العددين حـ ، ء وهو ما أردنا اثباته ويمكن اثبات هذه النظرية بطريقة مذكورة فى بـ ١٨٥ د من الجزء الثانى من الكمالات التوفيقية فى الاصول الجبرية فراجعه ان شئت

بـ ٢١ د الى الآن قد رمز لزيادتى المتغيرين س ، ص بحرفى حـ ، ك بالتناظر لكن بسبب انه من الآن فصاعدا نعتبر جملة متغيرات فى آن واحد فيرى انه من اللازم استعمال رمز يدل على المتغير المنسوبة له الزيادة ولذلك يستعمل حرف ف متبوعا بالحرف المرموز به للمتغير مثلا اذا اعتبرت عدة متغيرات ولتكن س ، ص ، ع ، ى مرتبطة ببعضها بجملة معادلات بحيث ان أحدها يكون متغيرا غير متعلق يستدل على الزيادات المتناظرة لهذه المتغيرات بالرموز ف س ، ف ص ، ف ع ، ف ى فاذا اعتبر س مثلا متغيرا غير متعلق تكون النهايات المتناظرة للنسب

$$\frac{ف ص}{ف س} ، \frac{ف ع}{ف س} ، \frac{ف ى}{ف س}$$

هى

$$\frac{فا ص}{فا س} ، \frac{فا ع}{فا س} ، \frac{فا ى}{فا س}$$

متى مال ف س الى الصفر

بـ ٢٢ د اذا تساوت دالتان بجميع مقادير المتغير الغير المتعلق أقول ان تفاضليهما يكونان متساويين وان مشتقيهما تكونان متساويتين.

ولاثبات ذلك نفرض ان ى ، و دالتان متساويتان لمتغير س ولنزد س زيادة ما ف س ولتكن ف ى ، ف و الزيادتين اللتين تزيدهما الدالتان ى ، و بالتناظر مقابلة للزيادة ف س فيحدث

$$ى + ف ى = و + ف و$$

ولكون ان ى = و يكون

$$ف ى = ف و$$

واذن

واذن يكون

$$\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}=\frac{\text{ف و}}{\text{ف س}}$$

وحيث ان هذه المعادلة تحصل مهما كان صغر ف س فتحصل أيضا عند النهاية

وحيث ان نهاية $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$ هي مشتقة ع أي هي $\frac{\text{فا ع}}{\text{فا س}}$ وان نهاية $\frac{\text{ف و}}{\text{ف س}}$ هي كذلك $\frac{\text{فا و}}{\text{فا س}}$ فيكون

$$\frac{\text{فا ع}}{\text{فا س}}=\frac{\text{فا و}}{\text{فا س}} \quad \text{أو} \quad \text{فا ع}=\text{فا و}$$

وهذه النظرية تصدق متى افترقت الدالتان المفروضتان عن بعضهما بكمية ثابتة لاننا اذا فرضنا ان

$$\text{ع}=\text{و}+\text{ث}$$

وآل س الى س + ف س يكون

$$\text{ع}+\text{ف ع}=\text{و}+\text{ف و}+\text{ث}$$

ولداعي ان ع = و + ث يكون

$$\text{ف ع}=\text{ف و}$$

ويكون

$$\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}=\frac{\text{ف و}}{\text{ف س}}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا ع}}{\text{فا س}}=\frac{\text{فا و}}{\text{فا س}}$$

ويكون

$$\text{فا ع}=\text{فا و}$$

اعني ان تفاضلي الدالتين المفترقتين عن بعضهما بكمية ثابتة يكونان متساويين

بـ ٢٤ د وبالعكس أي اذا تساوى تفاضلا دالتين اقول ان هاتين الدالتين تكونان مفترقتين عن بعضهما بكمية ثابتة

ولاثبات ذلك نفرض ان ص = ع − و ونفرض أن

$$\frac{\text{فا ع}}{\text{فا س}}=\frac{\text{فا و}}{\text{فا س}}$$

فمن المعادلة

$$\text{ص}=\text{ع}-\text{و}$$

ينتج أن

$$\text{ص}+\text{ف ص}=\text{ع}+\text{ف ع}-\text{و}-\text{ف و}$$

واذن يكون

$$\text{ف ص}=\text{ف ع}-\text{ف و}$$

ويكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}-\frac{\text{ف و}}{\text{ف س}}$$

وعند النهاية يكون

$$\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}}=\frac{\text{فا ع}}{\text{فا س}}-\frac{\text{فا و}}{\text{فا س}}=\text{٠}$$

فعلى هذا تكون المشتقة $\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}}$ معـدومة واذن يكون الفرق ص كمية ثابتة وهو ما أردنا اثباته

(فى نظرية دوال الدوال)

بند ٤٥ متى كان

$$\text{ع}=\text{د}(\text{ص})$$

وكانت ص دالة المتغير ولتكن $\text{د}_{\text{١}}(\text{س})$ يقال ان ع دالة دالة س

ولايجاد مشتقة ع بالنسبة للمتغير س يمكن تعويض ص بمقدارها بالنسـبة لمتغير س وهو $\text{د}_{\text{١}}(\text{س})$ وبذلك يكون

$$\text{ع}=\text{د}\left\{\text{د}_{\text{١}}(\text{س})\right\}$$

الا انه يمكن اجتناب هذا التعويض لانه يمكن وضع المتطابقة

$$\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}=\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ص}}\times\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$$

التى فيها ف س رمز زيادة المتغير الغـير المتعلق وفيها ف ص , ف ع زيادتا ص , ع بالتناظر فاذا فرض ان ف س يميل الى الصفر يكون

$$\text{نها}\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}=\text{نها}\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ص}}\times\text{نها}\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$$

لكن نها $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$ هى مشتقة ع بالنسبة الى س أى هى $\frac{\text{فا ع}}{\text{فا س}}$, نها $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}=\text{دَ}_{\text{١}}(\text{س})$

واما نها $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ص}}$ فانها $\text{دَ}(\text{ص})$ أى مشتقة الدالة $\text{د}(\text{ص})$ باعتبار ص فيها متغيرا غير متعلق لان هذه النهاية لاتتعلق بالارتباط الواقع بين ص , س ويكفى للتحصيل عليها تنقيص ف ص الى أن يميل الى الصفر وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا ع}}{\text{فا س}}=\text{دَ}(\text{ص})\,\text{دَ}_{\text{١}}(\text{س})\qquad(\text{١})$$

أعنى

أعنى ان مشتقة دالة دالة تساوى حاصل ضرب مشتقتى هاتين الدالتين

بـ ٢٦ د اذا عوضت $ى_١(س)$ فى معادلة (١) بمقدارها وهو $\frac{فا ص}{فا س}$ يحدث

$$\frac{فا ع}{فا س}=ىَ(ص)\frac{فا ص}{فا س}$$

واذن يكون

$$فا ع=ىَ(ص) فا ص \qquad (٢)$$

فيشاهد ان تفاضل الدالة ى (ص) متى كان ص مساويا بالدالة $ى_١(س)$ تكون صورته كما لو كان ص متغيرا غير متعلق الا انه يلزم فى التطبيقات تعويض فاص بمقداره وهو $ىَ_١(س)$ فاس

بـ ٢٧ د ويمكن وضع معادلة (١) بصورة اخرى ولذلك يلاحظ ان

$$ىَ(ص)=\frac{فا ع}{فا ص} \quad و \quad ىَ_١(س)=\frac{فا ص}{فا س}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{فا ع}{فا س}=\frac{فا ع}{فا ص}.\frac{فا ص}{فا س} \qquad (٣)$$

ويلزم ان يتنبه الى ان هذه المتساوية ليست متطابقة لان معنى فاص فى $\frac{فا ع}{فا ص}$ غير معناه فى $\frac{فا ص}{فا س}$ فان فاص يدل فى المقدار الاول على الزيادة الصغيرة جدا المتغير ص معتبرا متغيرا غير متعلق ومعنى فاص فى $\frac{فا ص}{فا س}$ تفاضل ص معتبرا دالة لمتغير س

مثلا ليكن

$$ع=ص^م \quad و \quad ص=\sqrt{س^٢-حـ^٢}$$

فمن هنا يكون

$$ع=\left(\sqrt{س^٢-حـ^٢}\right)^م=(س^٢-حـ^٢)^{\frac{م}{٢}}$$

وبناء على ما علم فى المثال الاول والثالث المذكورين فى بـ ١٦ د يكون

$$فا.ص^م=م ص^{م-١} فا ص \quad و \quad فا ص=\frac{س}{\sqrt{س^٢-حـ^٢}}فا س$$

وحينئذ يكون

$$فاع = م\left(\sqrt{س^{٢} - ح^{٢}}\right)^{م-١} \frac{س\, فاس}{\sqrt{س^{٢} - ح^{٢}}} = م\left(\sqrt{س^{٢} - ح^{٢}}\right)^{م-٢} س\, فاس$$

بند ٢٨ د ومتى كان

$$و = د(ع) \quad , \quad ع = د_{١}(ص) \quad , \quad ص = د_{٢}(س)$$

يوجد بموجب ما تقدم اثباته أن

$$فاو = دَ(ع)\, فاع \quad , \quad فاع = دَ_{١}(ص)\, فاص \quad , \quad فاص = دَ_{٢}(س)\, فاس$$

وحينئذ يكون

$$فاو = دَ(ع)\, دَ_{١}(ص)\, دَ_{٢}(س)\, فاس$$

ويكون

$$\frac{فاو}{فاس} = دَ(ع)\, دَ_{١}(ص)\, دَ_{٢}(س) \qquad (٤)$$

ويعلم من ذلك أن مشتقة الدالة و تساوى حاصل ضرب مشتقات الثلاث دوال المكونة لهذه الدالة

وهذه القاعدة تصدق مهما كان عدد الدوال المكونة كما يشاهد بالسهولة

الفصـــل الثانى

فى حساب تفاضلات الدوال ذات المتغير الواحد الغير المتعلق

(فى تفاضل مجموع جبرى)

بند ٢٩ لتكن

$$\text{ص} = \text{ى} + \text{و} - \text{ع}$$

(ى ، و ، ع دوال المتغير س) فاذا آل س الى س + ف س يكون

$$\text{ص} + \text{ف ص} = \text{ى} + \text{ف ى} + \text{و} + \text{ف و} - \text{ع} - \text{ف ع}$$

وحيث ان $\text{ص} = \text{ى} + \text{و} - \text{ع}$

فيكون $\text{ف ص} = \text{ف ى} + \text{ف و} - \text{ف ع}$

واذن فيكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} + \frac{\text{ف و}}{\text{ف س}} - \frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$$

وبالمرور الى النهاية يحدث

$$\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}} = \frac{\text{فا ى}}{\text{فا س}} + \frac{\text{فا و}}{\text{فا س}} - \frac{\text{فا ع}}{\text{فا س}}$$

واذن يكون

$$\text{فا ص أو فا } (\text{ى} + \text{و} - \text{ع}) = \text{فا ى} + \text{فا و} - \text{فا ع}$$

أعنى ان تفاضل المجموع الجبرى لعدة دوال لمتغير واحد يساوى المجموع الجبرى لتفاضلات هذه الدوال

(فى تفاضل حاصل ضرب)

بند ٣٠ ليكن المطلوب حساب تفاضل الدالة

$$\text{ص} = \text{و ى}$$

(ى دالة المتغير س ، د عدد ثابت) فمتى آل س الى س + ف س يكون

$$\text{ص} + \text{ف ص} = \text{د} (\text{ى} + \text{ف ى})$$

أو

$$\text{ص} + \text{ف ص} = \text{د ى} + \text{د ف ى}$$

وحيث ان

$$\text{ص} = \text{د ى}$$

فيكون

$$\text{ف ص} = \text{د ف ى}$$

ويكون

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{د} \frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}} = \text{د} \frac{\text{فا ى}}{\text{فا س}}$$

أو

$$\text{فا ص} = \text{د فا ى}$$

أعنى ان تفاضل حاصل ضرب أى عدد ثابت فى دالة يساوى حاصل ضرب العدد الثابت فى تفاضل هذه الدالة

بند ٣١ ولتكن

$$\text{ص} = \text{ى و}$$

فيكون

$$\text{ص} + \text{ف ص} = (\text{ى} + \text{ف ى})(\text{و} + \text{ف و})$$

وباجراء عملية الضرب يحدث

$$\text{ص} + \text{ف ص} = \text{ى و} + \text{و ف ى} + \text{ى ف و} + \text{ف ى ف و}$$

ولداعى ان ص = ى و يكون

$$\text{ف ص} = \text{و ف ى} + \text{ى ف و} + \text{ف ى ف و}$$

ومن هنا ينتج أن

$$\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} = \text{و} \frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} + \text{ى} \frac{\text{ف و}}{\text{ف س}} + \frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} \text{ف و}$$

وعند النهاية يصير الحاصل $\frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} \text{ف و}$ معدوما حيث ان $\frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}}$ له نهاية محدودة على العموم وان ف و يميل الى الصفر وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}} = \text{و} \frac{\text{فا ى}}{\text{فا س}} + \text{ى} \frac{\text{فا و}}{\text{فا س}}$$

ويكون

يكون $\text{فاع} = \text{و}\,\text{فاع} + \text{ع}\,\text{فاو}$

أعنى ان تفاضل حاصل ضرب دالتين يساوى مجموع حاصلى الضرب اللذين يتحصل عليهما بضرب كل دالة فى تفاضل الدالة الاخرى

فاذا قسم القانون المتقدم على الحاصل ص أو عو يتحصل

$$\frac{\text{فاص}}{\text{ص}} = \frac{\text{فاع}}{\text{ع}} + \frac{\text{فاو}}{\text{و}}$$

وقد سميت نسبة تفاضل أى دالة الى هذه الدالة تفاضلا لوغاريتميا وحينئذ يتبين من هذا القانون الاخير أن التفاضل اللوغاريتمى لحاصل ضرب دالتين يساوى مجموع التفاضلين اللوغاريتميين لهاتين الدالتين

بـ ٣٢ د واعتبر الآن حاصل ضرب جملة دوال لمتغير واحد غير متعلق مثل س وليكن

$$\text{ص} = \text{ع}\,\text{ع}_{\text{١}}\,\text{ع}_{\text{٢}} \cdots \text{ع}_{\text{م}-\text{١}}$$

هو هذا الحاصل فبتطبيق القاعدة المتعلقة بالتفاضل اللوغاريتمى لحاصل ضرب دالتين يحدث

$$\frac{\text{فاص}}{\text{ص}} = \frac{\text{فاع}}{\text{ع}} + \frac{\text{فا}\left(\text{ع}_{\text{١}}\text{ع}_{\text{٢}} \cdots \text{ع}_{\text{م}-\text{١}}\right)}{\text{ع}_{\text{١}}\text{ع}_{\text{٢}} \cdots \text{ع}_{\text{م}-\text{١}}}$$

$$= \frac{\text{فاع}}{\text{ع}} + \frac{\text{فاع}_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{١}}} + \frac{\text{فا}\left(\text{ع}_{\text{٢}} \cdots \text{ع}_{\text{م}-\text{١}}\right)}{\text{ع}_{\text{٢}} \cdots \text{ع}_{\text{م}-\text{١}}}$$

$$= \frac{\text{فاع}}{\text{ع}} + \frac{\text{فاع}_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{١}}} + \frac{\text{فاع}_{\text{٢}}}{\text{ع}_{\text{٢}}} + \frac{\text{فا}\left(\cdots \text{ع}_{\text{م}-\text{١}}\right)}{\cdots \text{ع}_{\text{م}-\text{١}}}$$

. . . .

فيتبين من المتساوية الاخيرة من هذه المتساويات وهى

$$\frac{\text{فاص}}{\text{ص}} = \frac{\text{فاع}}{\text{ع}} + \frac{\text{فاع}_{\text{١}}}{\text{ع}_{\text{١}}} + \frac{\text{فاع}_{\text{٢}}}{\text{ع}_{\text{٢}}} + \cdots + \frac{\text{فاع}_{\text{م}-\text{١}}}{\text{ع}_{\text{م}-\text{١}}}$$

أن التفاضل اللوغاريتمى لحاصل ضرب جملة دوال يساوى مجموع التفاضلات اللوغاريتمية لهذه الدوال

ولاجل ايجاد التفاضل فاص يكفى ضرب القانون المتقدم فى ص فيحدث

$$\text{فاص} = \text{ع}_1\text{ع}_2 \cdots \text{ع}_{\text{م}-1}\,\text{فاع} + \text{عع}_2 \cdots \text{ع}_{\text{م}-1}\,\text{فاع}_1 + \cdots + \text{ععع}_1{}_2 \cdots \text{فاع}_{\text{م}-1}$$

اعنى أن تفاضل حاصل ضرب عدة دوال يساوى مجموع حواصل الضرب التى يتحصل عليها بضرب تفاضل كل دالة فى حاصل ضرب الدوال الاخرى

(فى تفاضل الكسر)

بند ٣٣ ليكن

$$\text{ص} = \frac{\text{ع}}{\text{و}}$$

(ع , و دالتان لمتغير واحد س غير متعلق)
فبمحو المقام يحدث

$$\text{ص و} = \text{ع}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{فاص}}{\text{ص}} + \frac{\text{فاو}}{\text{و}} = \frac{\text{فاع}}{\text{ع}}$$

أو
$$\frac{\text{فاص}}{\text{ص}} = \frac{\text{فاع}}{\text{ع}} - \frac{\text{فاو}}{\text{و}}$$

فيتبين من هذا القانون ان التفاضل اللوغاريتمى لاى كسر يساوى التفاضل اللوغاريتمى لبسطه ناقصا التفاضل اللوغاريتمى لمقامه
فاذا ضرب القانون المذكور فى ص أو فى $\frac{\text{ع}}{\text{و}}$ يحدث

$$\text{فاص} = \frac{1}{\text{و}}\text{فاع} - \frac{\text{ع}}{\text{و}^2}\text{فاو}$$

أو
$$\text{فاص} = \frac{\text{و فاع} - \text{ع فاو}}{\text{و}^2}$$

أعنى ان تفاضل أى كسر يتحصل بضرب مقامه فى تفاضل بسطه وطرح حاصل ضرب بسطه فى تفاضل مقامه من الناتج وقسمة الباقى على مربع مقامه
فاذا كان البسط ع كمية ثابتة يؤل تفاضل $\frac{\text{ع}}{\text{و}}$ الى $-\frac{\text{ع فاو}}{\text{و}^2}$

(فى تفاضل قوة دالة)

بند ٣٤ لتكن ع دالة لمتغير س ولنعتبر القوة

$$ص = ع^{م} \qquad (١)$$

(م رمز لعدد ثابت)

ولنفرض أولا ان م عدد صحيح موجب ففي هذه الحالة تكون ص حاصل ضرب عوامل عددها م كل منها يساوى ع وحينئذ يكون التفاضل اللوغاريتمي للدالة ص مساويا بالمجموع التفاضلات اللوغاريتمية لهذه العوامل وحينئذ يكون

$$\frac{فا ص}{ص} = م \frac{فا ع}{ع} \qquad (٢)$$

وثانيا لنفرض ان م عدد كسرى موجب وليكن ك مقامه فيكون

$$ص^{ك} = ع^{م ك}$$

والتفاضل اللوغاريتمي للقوة $ص^{ك}$ هو ك $\frac{فا ص}{ص}$ والتفاضل اللوغاريتمي للقوة $ع^{م ك}$ هو م ك $\frac{فا ع}{ع}$ اذا ان م ك عدد صحيح وحينئذ يكون

$$ك \frac{فا ص}{ص} = م ك \frac{فا ع}{ع}$$

وبحذف العامل ك يوجد قانون (٢)

وثالثا لنفرض ان م عدد سالب صحيحا كان أو كسريا فبواسطة قانون (١) يحدث

$$ص ع^{-م} = ١$$

وحيث ان الدالة $ص ع^{-م}$ ثابتة فيكون تفاضلها معدوما ويكون تفاضلها اللوغاريتمي وهو $\frac{فا ص}{ص} + \frac{فا (ع^{-م})}{ع^{-م}}$ معدوما أيضا وغير ذلك حيث ان −م عدد موجب فيكون $\frac{فا (ع^{-م})}{ع^{-م}}$ مساويا بالحاصل −م $\frac{فا ع}{ع}$ وحينئذ يكون

$$\frac{فا ص}{ص} - م \frac{فا ع}{ع} = ٠$$

أو

$$\frac{فا ص}{ص} = م \frac{فا ع}{ع}$$

وليس هذا القانون الا قانون (٢)

و يعلم من ذلك ان قانون (٢) عمومى و يحصل مهما كان الاس م فاذا ضرب هذا القانون فى قانون (١) يحدث

$$\text{فا}\,\text{ص} = \text{م}\,\text{ق}^{\text{م}-1}\,\text{فا}\,\text{ق} \qquad (٣)$$

وينتج من ذلك أن تفاضل قوة أى دالة يساوى حاصل ضرب درجة القوة فى الدالة مرفوعة الى قوة درجتها تساوى الدرجة الاصلية ناقصة واحدا فى تفاضل الدالة المذكورة

بـ ٣٥ د وهذه القاعدة تستعمل لحساب تفاضلات الجذور

مثلا

$$\text{فا}\sqrt[\text{ه}]{\text{ق}} = \text{فا}\,\text{ق}^{\frac{1}{\text{ه}}} = \frac{1}{\text{ه}}\,\text{ق}^{\frac{1}{\text{ه}}-1}\,\text{فا}\,\text{ق} = \frac{\text{فا}\,\text{ق}}{\text{ه}\sqrt[\text{ه}]{\text{ق}^{\text{ه}-1}}}$$

وفى الحالة التى يكون فيها $\text{ه} = ٢$ يكون

$$\text{فا}\sqrt{\text{ق}} = \frac{\text{فا}\,\text{ق}}{٢\sqrt{\text{ق}}}$$

أعنى ان تفاضل الجذر التربيعى لاى دالة يساوى تفاضل هذه الدالة مقسوما على ضعف الجذر

(تطبيقات)

بـ ٣٦ د القواعد المتقدمة تكفى لحساب تفاضلات جميع الدوال الجبرية المحلولة ولنعط بعض أمثلة فنقول

أولا لتكن

$$\text{ص} = \text{ح}\,\text{س}^{\text{م}} + \text{ء}\,\text{س}^{\text{ه}} + \text{هـ}\,\text{س}^{\text{ك}} + \cdots$$

فبتطبيق القواعد المتعلقة بالجمع والضرب والقوى يحدث

$$\text{فا}\,\text{ص} = (\text{م}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-1} + \text{ه}\,\text{ء}\,\text{س}^{\text{ه}-1} + \text{ك}\,\text{هـ}\,\text{س}^{\text{ك}-1} + \cdots)\,\text{فا}\,\text{س}$$

وثانيا لتكن

$$\text{ص} = \text{ح} + \text{ء}\sqrt{\text{س}} + \frac{\text{هـ}}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{\text{ك}}{\text{س}}$$

فيمكن كتابة هذه الدالة هكذا

$$\text{ص} = \text{ح} + \text{ء}\,\text{س}^{\frac{1}{٢}} + \text{هـ}\,\text{س}^{-\frac{1}{٢}} + \text{ك}\,\text{س}^{-1}$$

وحينئذ يكون

$$\text{فاص}=\left(\tfrac{1}{2}\,\text{ء}\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}\,\text{هـ}\,\text{س}^{-\frac{3}{2}}-\text{ك}\,\text{س}^{-2}\right)\text{فاس}$$

او

$$\text{فاص}=\left(\frac{\text{ء}}{2\sqrt{\text{س}}}-\frac{\text{هـ}}{2\text{س}\sqrt{\text{س}}}-\frac{\text{ك}}{\text{س}^{2}}\right)\text{فاس}$$

وثالثا لتكن

$$\text{ص}=\text{س}^{2}(\text{ح}^{2}+\text{س}^{2})\sqrt{\text{ح}^{2}-\text{س}^{2}}$$

فيمكن كتابة هذه الدالة هكذا

$$\text{ص}=(\text{ح}^{2}\text{س}^{2}+\text{س}^{4})\sqrt{\text{ح}^{2}-\text{س}^{2}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{فاص}=\sqrt{\text{ح}^{2}-\text{س}^{2}}\;\text{فا}(\text{ح}^{2}\text{س}^{2}+\text{س}^{4})+(\text{ح}^{2}\text{س}^{2}+\text{س}^{4})\;\text{فا}\sqrt{\text{ح}^{2}-\text{س}^{2}}$$

$$=\sqrt{\text{ح}^{2}-\text{س}^{2}}\,(2\text{ح}^{2}\text{س}+4\text{س}^{3})\text{فاس}-(\text{ح}^{2}\text{س}^{2}+\text{س}^{4})\frac{\text{س فاس}}{\sqrt{\text{ح}^{2}-\text{س}^{2}}}$$

او

$$\text{فاص}=\frac{(2\text{ح}^{4}+\text{ح}^{2}\text{س}^{2}-5\text{س}^{4})\text{س فاس}}{\sqrt{\text{ح}^{2}-\text{س}^{2}}}$$

ورابعا ليكن

$$\text{ص}=(\text{ح}\text{س}^{\text{م}}+\text{ء})^{\text{ن}}$$

فيكون

$$\text{فاص}=\text{ن}(\text{ح}\text{س}^{\text{م}}+\text{ء})^{\text{ن}-1}\;\text{فا}(\text{ح}\text{س}^{\text{م}}+\text{ء})$$

او

$$\text{فاص}=\text{م}\,\text{ن}\,\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}-1}(\text{ح}\text{س}^{\text{م}}+\text{ء})^{\text{ن}-1}\;\text{فاس}$$

(تطبيقات على بعض مسائل بسيطة)

بند ٣٧ ولنبين الآن كيف ان حساب التفاضل يوصل الى معرفة المنحنيات المعلومة الخواص وقبل الشروع فى ذلك نذكر الطالب ببعض تعريفات فنقول

اذا كان منحن منسوبا الى محورين احداثيين مستقيمين ورسم من احدى نقطه مماس وعمودى فجزاء هذين المستقيمين المحصورين بين نقطة التماس ومحور السينات يقال لهما على التناظر طول المماس وطول العمودى ومسقطا هذين الطولين على محور السينات يسميان على التناظر تحت المماس وتحت العمودى

بند ٣٨ المسئلة الاولى — المطلوب معرفة المنحنى الذى تحت عموديه يساوى كمية ثابتة ولتكن ح

فلحل هذه المسئلة نفرض أن سَ , صَ احداثيا نقطة حيثما اتفق م من المنحنى المبحوث عنه فيمكن اعتبار ص دالة للمتغير س وهذه الدالة هى اللازم ايجادها ولذلك نمد الراسى مع لنقطة م والعمودى مه فيكون

$$ه ع = م ع × ظا ع م ه$$

لكن م ع = ص , ظا ع م ه = ظا م ر ه = $\frac{فا ص}{فا س}$ (شكل ٤)

فحينئذ يكون

$$ه ع = ص \frac{فا ص}{فا س}$$

وحينئذ يجب أن يكون

$$ص \frac{فا ص}{فا س} = ح$$

ومن هنا يستنتج أن

$$ص فا ص = ح فا س$$

أو

$$٢ ص فا ص = ٢ ح فا س$$

لكن

$$٢ ص فا ص = فا (ص^٢)$$

وكذا

$$٢ ح فا س = فا (٢ ح س)$$

فاذن يكون

$$فا (ص^٢) = فا (٢ ح س)$$

لكن قد علم أن الدالتين اللتين تفاضلاهما متساويان لا يمكن أن تفترقا عن بعضهما الا

الابكية ثابتة فحينئذ اذا رمز بحرف ث لعدد ثابت اختيارى تكون معادلة المنحنى المطلوب هى

$$ص^٢ = ٢ ح س + ث$$

وهذه المعادلة تدل على جميع القطاعات المكافئة المتحدة الكمية المخصصة وهى ٢ح ومحورها منطبق على محور السينات

بند ٣٩ المسئلة الثانية — المطلوب معرفة المنحنى الذى عموديه يساوى كمية ثابتة معلومة ولتكن ح

فيشاهد من الشكل المتقدم أن مربع العمودى يساوى مجموع مربعى تحت العمودى والرأسى وحينئذ يكون

$$ص^٢ \left(\frac{فاص}{فاس}\right)^٢ + ص^٢ = ح^٢$$

ومن هذه المعادلة يستنتج أن

$$فاس = \frac{ص فاص}{\sqrt{ح^٢ - ص^٢}}$$

ومهما كانت الاشارة التى يؤخذ بها الجذر $\sqrt{ح^٢ - ص^٢}$ يكون لطرف الثانى لهذا القانون هو تفاضل $- \sqrt{ح^٢ - ص^٢}$ وبناء على ذلك يكون هذا القانون دالا على ان تفاضلى دالتى س وهما

$$س \quad و \quad - \sqrt{ح^٢ - ص^٢}$$

متساويان وحينئذ لا يمكن أن تفترق هاتان الدالتان عن بعضهما الا بكمية ثابتة فلتكن هذه الكمية الثابتة هى ل فيكون

$$س - ل = - \sqrt{ح^٢ - ص^٢}$$

ومن هنا يحدث

$$(س - ل)^٢ + ص^٢ = ح^٢$$

وهذه المعادلة تدل على الدوائر التى نصف قطرها ح ومراكزها موجودة على محور السينات

بند ٤٤ المسئلة الثالثة — المطلوب معرفة المنحنى الذى تحت مماسه مناسب نسبة عكسية للرأسى

فمن الشكل المتقدم يعلم أن $ح ر = م ح ظتام ر ح = \frac{ص فا س}{فا ص}$ وحينئذ تكون المعادلة التفاضلية للمنحنى المبحوث عنه هى

$$\frac{ص فا س}{فا ص} = \frac{ح^٢}{ص}$$

ومن هذه المعادلة يستنتج أن

$$فا س = \frac{ح^٢ فا ص}{ص^٢}$$

لكن

$$\frac{ح^٢ فا ص}{ص^٢} = - فا \frac{ح^٢}{ص}$$

فحينئذ يكون

$$س = - \frac{ح^٢}{ص} + ث$$

أو

$$س ص - ث ص = - ح^٢$$

وحينئذ يكون المنحنى المطلوب قطعا زائدا قائما احد خطيه التقريبين هو محور السينات وخطه التقريبى الآخر موازٍ لمحور الصادات

(نظرية تتعلق بحساب تفاضل الدوال المركبة من عدة دوال لمتغير واحد غير متعلق)

بند ٤٥ جميع القواعد التى تحصلنا عليها الى الآن منحصرة كما نشاهد قريبا ان شاء الله تعالى فى نظرية عمومية تتعلق بعملية أخذ تفاضل دالة مركبة من عدة دوال لمتغير واحد غير متعلق

فلتكن ع , و دالتين للمتغير الغير المتعلق س ولتكن

$$ص = د(ع , و)$$

دالة للدالتين ع , و فيقال ان ص دالة مركبة من الدالتين ع , و

ولنرمز

ولنرمز بالرمز $\text{د}_{1}(\text{ع}\ ,\ \text{و})$ للمشتقة $\text{د}(\text{ع}\ ,\ \text{و})$ بالنسبة للدالة ع أعنى للمشتقة المأخوذة باعتبار ان ع متغير غير متعلق وان و ثابت فيكون

$$\text{د}(\text{ع}+\text{فع}\ ,\ \text{و})-\text{د}(\text{ع}\ ,\ \text{و})=\left[\text{د}_{1}(\text{ع}\ ,\ \text{و})+\text{ل}\right]\text{فع} \qquad (١)$$

وحرف ل رمز لكمية تنعدم حينما تنعدم الزيادة فع التى هى زيادة الدالة ع ولنرمز أيضا بالرمز $\text{د}_{2}(\text{ع}\ ,\ \text{و})$ للمشتقة $\text{د}(\text{ع}\ ,\ \text{و})$ بالنسبة الى و فيوجد كذلك ان

$$\text{د}(\text{ع}\ ,\ \text{و}+\text{فو})-\text{د}(\text{ع}\ ,\ \text{و})=\left[\text{د}_{2}(\text{ع}\ ,\ \text{و})+\text{ح}\right]\text{فو} \qquad (٢)$$

وحرف ح رمز لكمية تنعدم متى انعدمت الزيادة فو

فاذا عوّضنا ع فى هذا القانون الاخير بالمقدار ع+فع يحدث

$$\left.\begin{array}{l}\text{د}(\text{ع}+\text{فع}\ ,\ \text{و}+\text{فو})-\text{د}(\text{ع}+\text{فع}\ ,\ \text{و})\\ =\left[\text{د}_{2}(\text{ع}+\text{فع}\ ,\ \text{و})+\text{حَ}\right]\text{فو}\end{array}\right\} \qquad (٣)$$

وحرف حَ رمز لما تؤول اليه كمية ح متى عوض فيها ع بكمية ع+فع وهى تميل الى الصفر حينما تميل كمية فو اليه

ولنفرض الآن أن فع , فو هما الزيادتان اللتان تزداد بهما الدالتان ع , و متى زاد س زيادة ما فس ولنرمز أيضا بالرمز فص للزيادة التى تزداد بها الدالة ص وهى

$$\text{فص}=\text{د}(\text{ع}+\text{فع}\ ,\ \text{و}+\text{فو})-\text{د}(\text{ع}\ ,\ \text{و})$$

فباضافة المعادلتين (١) و (٣) الى بعضهما كل طرف لنظيره يحدث

$$\text{فص}=\left[\text{د}_{1}(\text{ع}\ ,\ \text{و})+\text{ل}\right]\text{فع}+\left[\text{د}_{2}(\text{ع}+\text{فع}\ ,\ \text{و})+\text{حَ}\right]\text{فو}$$

وبالقسمة على فس يحدث

$$\frac{\text{فص}}{\text{فس}}=\left[\text{د}_{1}(\text{ع}\ ,\ \text{و})+\text{ل}\right]\frac{\text{فع}}{\text{فس}}+\left[\text{د}_{2}(\text{ع}+\text{فع}\ ,\ \text{و})+\text{حَ}\right]\frac{\text{فو}}{\text{فس}}$$

وبالمرور الى النهاية وملاحظة ان الكميات ل , حَ , فع تميل الى الصفر يحدث

$$\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}}=\text{د}_{1}(\text{ع}\ ,\ \text{و})\frac{\text{فاع}}{\text{فاس}}+\text{د}_{2}(\text{ع}\ ,\ \text{و})\frac{\text{فاو}}{\text{فاس}}$$

وبالضرب فى فاس يحدث

$$فا ص = د_1(ى ، و) فا ى + د_2(ى ، و) فا و$$

أو
$$فا ص = \frac{فا د(ى ، و)}{فا ى} فا ى + \frac{فا د(ى ، و)}{فا و} فا و$$

أو
$$فا ص = \frac{فا ص}{فا ى} فا ى + \frac{فا ص}{فا و} فا و \qquad (٤)$$

ويجب ان يلاحظ ان المتغيرين ى ، و يجب ان يعتبرا فى المشتقتين الجزئيتين وهما $\frac{فا ص}{فا ى}$ ، $\frac{فا ص}{فا و}$ متغيرين غير متعلقين وان يعتبر هذان المتغيران فى العاملين فا ى ، فا و المضروبتين فيهما هاتين المشتقتين دالتين لمتغير سه

بـ٤٢د وهذه النتيجة التى تحصلنا عليها يمكن تعميمها بالسهولة مثلا لتكن

$$ص = د(ى ، و ، ع)$$

فيكون

$$ف ص = د(ى + ف ى ، و + ف و ، ع + ف ع) - د(ى ، و)$$

فاذا وضعنا

$$\frac{فا ص}{فا ى} = د_1(ى ، و ، ع) ، \frac{فا ص}{فا و} = د_2(ى ، و ، ع) ، \frac{فا ص}{فا ع} = د_3(ى ، و ، ع)$$

يوجد بموجب الاعتبارات المتقدمة ان

$$د(ى + ف ى ، و ، ع) - د(ى ، و ، ع) = [د_1(ى ، و ، ع) + ل] ف ق ، \qquad (١)$$

$$د(ى ، و + ف و ، ع) - د(ى ، و ، ع) = [د_2(ى ، و ، ع) + ح] ف و ، \qquad (٢)$$

$$د(ى ، و ، ع + ف ع) - د(ى ، و ، ع) = [د_3(ى ، و ، ع) + ط] ف ع \qquad (٣)$$

فاذا غيرنا ى بكمية ى + ف ى فى معادلة (٢) يحدث

$$\left.\begin{array}{l} د(ى + ف ى ، و + ف و ، ع) - د(ى + ف ى ، و ، ع) \\ = [د_2(ى + ف ى ، و ، ع) + حَ] ف و \end{array}\right\} \qquad (٤)$$

وبتغيير الدالتين ى ، و فى معادلة (٣) بكميتى ى + ف ى ، و + ف و يحدث

$$\left.\begin{array}{l} د(ى + ف ى ، و + ف و ، ع + ف ع) - د(ى + ف ى ، و + ف و ، ع) \\ = [د_3(ى + ف ى ، و + ف و ، ع) + طَ] ف ع \end{array}\right\} \qquad (٥)$$

وباضافة

وباضافة معادلات (١) و (٤) و (٥) الى بعضها والقسمة على ف‌سہ يحدث

$$\frac{ف صہ}{ف سہ}=\left[ء_{٢}(ت ,و ,ع)+ل\right]\frac{ف ت}{ف سہ}+\left[ء_{٢}(ت+ف ت ,و ,ع)+ك\right]\frac{ف و}{ف سہ}$$

$$+\left[ء_{٣}(ت+ف ت ,و+ف و ,ع)+ط\right]\frac{ف ع}{ف سہ}$$

وعند النهاية يكون

$$\frac{فا صہ}{فا سہ}=ء_{١}(ت ,و ,ع)\frac{فا ت}{فا سہ}+ء_{٢}(ت ,و ,ع)\frac{فا و}{فا سہ}+ء_{٣}(ت ,و ,ع)\frac{فا ع}{فا سہ}$$

او $$فا صہ=\frac{فا صہ}{فا ت}فا ت+\frac{فا صہ}{فا و}فا و+\frac{فا صہ}{فا ع}فا ع$$

ومن المعلوم ان هذه الطريقة يمكن تطبيقها مهما كان عدد الدوال المركبة وحينئذ يمكن النطق بهذه النظرية وهى

نظرية — تفاضل أى دالة مركبة من عدة دوال لمتغير واحد غير متعلق يساوى مجموع حواصل الضرب التى يتحصل عليها بأخذ مشتقة هذه الدالة بالنسبة لكل دالة مركبة معتبرة متغيرا غير متعلق فى تفاضل هذه الدالة المركبة بالنسبة للمتغير الغير المتعلق المذكور

بـ ٤٣ د تطبيقات — الاول لتكن

$$صہ=حت+ءو+هع+\cdots$$

(وحروف ح و ء و ه رموز لاعداد ثابتة) فهنا المشتقات $\frac{فا صہ}{فا ت}$ و $\frac{فا صہ}{فا و}$ و $\frac{فا صہ}{فا ع}$ و ... مساوية بالتناظر للثوابت ح و ء و ه و ... وحينئذ يكون

$$فا صہ=ح فا ت+ء فا و+ه فا ع+\cdots$$

الثانى لتكن

$$صہ=ت و ع ر\cdots$$

فهنا المشتقات $\frac{فا صہ}{فا ت}$, $\frac{فا صہ}{فا و}$, $\frac{فا صہ}{فا ع}$, ... مساوية بالتناظر للحواصل

و ع ر ... , ت ع ر ... , ت و ر ... , ...

وحينئذ يكون

$$فا صہ=و ع ر\cdots فا ت+ت ع ر\cdots فا و+ت و ر\cdots فا ع+\cdots$$

كما وجدناه في (بند ٣٢) وهذا القانون يوصل كما شوهد في (بند ٣٤) الى قاعدة حساب تفاضل القوى

الثالث لتكن

$$ص=\frac{ى}{و}=ى\,و^{-1}$$

فيكون

$$\frac{فاص}{فاى}=و^{-1} \quad ، \quad \frac{فاص}{فاو}=-ى\,و^{-2}$$

وحينئذ يكون

$$فاص=و^{-1}\,فاى-ى\,و^{-2}\,فاو$$

أو

$$فاص=\frac{و\,فاى-ى\,فاو}{و^{2}}$$

(تمرينات)

الاول $ص=س^{2}(ح^{2}+س^{2})\sqrt{ح^{2}-س^{2}}$ $فاص=\frac{2ح^{4}+ح^{2}س^{2}-5س^{4}}{\sqrt{ح^{2}-س^{2}}}\,س\,فاس$

الثاني $ص=\sqrt{\frac{س^{3}}{ح-س}}$ $فاص=\frac{(3ح-2س)\sqrt{س}\,فاس}{2\sqrt{(ح-س)^{3}}}$

الثالث $ص=د(ح+س)$ $فاص=د'(ح+س)\,فاس$

الرابع $ص=د(ح+دس^{2})$ $فاص=2د'(ح+دس^{2})\,د\,س\,فاس$

الخامس $ص=د\left(\frac{ح}{س}\right)$ $فاص=-ح\,د'\left(\frac{ح}{س}\right)\frac{فاس}{س^{2}}$

السادس $ص=\frac{1}{س^{2}}\,د\left(\frac{ح+س}{د-س}\right)$

$$فاص=-\frac{2}{س^{3}}\,د\left(\frac{ح+س}{د-س}\right)فاس+\frac{(ح+د)\,د'\left(\frac{ح+س}{د-س}\right)}{س^{2}(د-س)^{2}}\,فاس$$

*(في

(فى تفاضل الدوال اللوغاريتمية)

بـ ٤٤ د لتكن

$$ص=لو\,س$$

(اللوغاريتمات مأخوذة فى جملة أساسها ح)

فيكون

$$ص+ف\,ص=لو(س+ف\,س)$$

واذن يكون

$$ف\,ص=لو(س+ف\,س)-لو\,س$$

أو

$$ف\,ص=لو\left(1+\frac{ف\,س}{س}\right)$$

واذن يكون

$$\frac{ف\,ص}{ف\,س}=\frac{لو\left(1+\frac{ف\,س}{س}\right)}{ف\,س}$$

فاذا جعل $ف\,س=\frac{س}{م}$ يحدث

$$\frac{ف\,ص}{ف\,س}=\frac{م}{س}لو\left(1+\frac{1}{م}\right)=\frac{1}{س}لو\left(1+\frac{1}{م}\right)^{م}$$

فاذا مال ف س الى الصفر يميل م الى مالانهاية وتميل الكمية $\left(1+\frac{1}{م}\right)^{م}$ الى ه (كما هو مقرر فى بنود ٦٩ و ٧٠ و ٧١ و ٧٢ من الجزء الثانى من كتاب الكمالات التوفيقية فى الاصول الجبرية) وحينئذ يكون

$$\frac{فا\,ص}{فا\,س}=\frac{1}{س}لو\,ه$$

ومن هنا يكون

$$فا\,ص \quad أى \quad فا\,لو\,س=\frac{فا\,س}{س}لو\,ه \qquad (1)$$

فاذا كانت اللوغاريتمات مأخوذة فى جملة نيبر يكون $\overline{لو}\,ه=1$ واذن يكون

$$فا\,\overline{لو}\,س=\frac{فا\,س}{س} \qquad (2)$$

ويجب ان يتنبه الى انه بموجب (بـ ٣٦ د) يكون القانونان (١) و (٢) حقيقيين

أيضا متى لم يكن س متغيرا غير متناه ويشاهد كذلك ان التفاضل اللوغاريتمي لدالة ليس الا التفاضل اللوغاريتمي النيبرياني لهذه الدالة

بند ٤٥ أمثلة — الاول ليكن

$$\text{ص} = \text{لو}\left(\text{س} + \sqrt{\text{ح}^2 + \text{س}^2}\right)$$

فيوجد أن

$$\text{فا ص} = \frac{\text{فا س} + \frac{\text{س فا س}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{س}^2}}}{\text{س} + \sqrt{\text{ح}^2+\text{س}^2}} = \frac{\text{فا س}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{س}^2}}$$

الثانى ليكن

$$\text{ص} = \text{لو}\left(\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{س}^2}}\right)$$

فيتنبه في اول الامر الى أن

$$\text{لو}\left(\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{س}^2}}\right) = \text{لو س} - \text{لو}\sqrt{\text{ح}^2+\text{س}^2}$$

وحينئذ يكون

$$\text{فا ص} = \frac{\text{فا س}}{\text{س}} - \frac{\text{س فا س}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{س}^2}} = \frac{\text{ح}^2\,\text{فا س}}{\text{س}\left(\text{ح}^2+\text{س}^2\right)}$$

الثالث ليكن

$$\text{ص} = \text{لو}\left[(\text{س}-\text{ح})^{\text{م}}(\text{س}-\text{ء})^{\text{ه}}(\text{س}-\text{ه})^{\text{ع}}\cdots\right]$$

فهذه الكمية تساوى

$$\text{م لو}(\text{س}-\text{ح}) + \text{ه لو}(\text{س}-\text{ء}) + \text{ع لو}(\text{س}-\text{ه}) + \cdots$$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}} = \frac{\text{م}}{\text{س}-\text{ح}} + \frac{\text{ه}}{\text{س}-\text{ء}} + \frac{\text{ع}}{\text{س}-\text{ه}} + \cdots$$

فاذا

فاذا جعلنا

$$(س-د)^{م}(س-ى)^{ن}(س-هـ)^{ح}\cdots = ى(س)$$

يكون

$$\frac{فا ص}{فا س} = \frac{فا لو ص}{فا س} = \frac{ىَ(س)}{ى(س)}$$

وينتج من ذلك أن

$$\frac{ىَ(س)}{ى(س)} = \frac{م}{س-د} + \frac{ن}{س-ى} + \frac{ح}{س-هـ} + \cdots$$

وهذا القانون يمكن استعماله اساسا لنظرية الجذور المتساوية

(فى تفاضل الدوال الاسية)

بـ ٤٦ د لتكن الدالة

$$ص = د^{ع}$$

(حرف ع رمز لدالة حيثما اتفق لمتغير س) فبأخذ لوغاريتمى الطرفين فى الجملة النيبريانية يحدث

$$لَو ص = ع لَو د$$

ومن هنا يحدث

$$\frac{فا ص}{ص} = لَو د فا ع$$

واذن يكون

$$فا د^{ع} = د^{ع} لَو د فا ع$$

وعلى الخصوص اذا كان د=هـ , ع=س يكون

$$فا هـ^{س} = هـ^{س} فا س$$

وحينئذ تكون الدالة $هـ^{س}$ مساوية لمشتقتها

بـ ٤٧ د مثالان — الاول ليكن

$$ص = و^{ع}$$

(حرفا و ، ع رمزان لدالتين لمتغير سه) فبأخذ لوغاريتمى الطرفين فى الجملة النيبريانية يحدث

$$\text{لو}\,\text{صه} = \text{ع}\,\text{لو}\,\text{و}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا صه}}{\text{صه}} = \text{فا ع}\,\text{لو}\,\text{و} + \text{ع}\,\frac{\text{فا و}}{\text{و}}$$

أو

$$\text{فا صه} = \text{صه}\,\text{فا ع}\,\text{لو}\,\text{و} + \frac{\text{صه}}{\text{و}}\,\text{ع}\,\text{فا و}$$

اى

$$\text{فا}(\text{و}^{\text{ع}}) = \text{و}^{\text{ع}}\,\text{لو}\,\text{و}\,\text{فا ع} + \text{و}^{\text{ع}-1}\,\text{ع}\,\text{فا و}$$

ويمكن الوصول الى هذا الناتج بتطبيق قاعدة حساب تفاضلات الدوال المركبة الثانى ليكن

$$\text{صه} = \text{ى}^{\text{سه}^{\text{سه}}}$$

فيوجد أن

$$\text{فا صه} = \text{ى}^{\text{سه}^{\text{سه}}}\,\text{لو}\,\text{ى}\,\text{ى}^{\text{سه}}\,\text{فا سه} + \text{ى}^{\text{سه}^{\text{سه}}}\,\text{ى}^{\text{سه}}\,\text{سه}\,\text{لو}\,\text{ى}\,\text{لو}\,\text{ى}\,\text{فا سه}$$

(فى حساب تفاضلات الدوال الدائرية مباشرة)

بند ٤٨ دالة الجيب — لتكن

$$\text{صه} = \text{جا سه}$$

فاذا آل سه الى سه+ف سه تؤل الدالة صه الى صه+ف صه وحينئذ يكون .

$$\text{صه} + \text{ف صه} = \text{جا}(\text{سه} + \text{ف سه})$$

واذن يكون

$$\text{ف صه} = \text{جا}(\text{سه} + \text{ف سه}) - \text{جا سه}$$

أو

$$\text{ف صه} = 2\,\text{جا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{ف سه}\,\text{جتا}\,(\text{سه} + \tfrac{1}{2}\,\text{ف سه})$$

وحينئذ

وحينئذ يكون

$$\frac{ف ص}{ف س} = \frac{جا \frac{1}{2} ف س}{\frac{1}{2} ف س} جتا (س + \frac{1}{2} ف س)$$

فاذا مالت الزيادة ف س الى الصفر يميل العامل الاول من الطرف الثانى الى الواحد
ويميل العامل الثانى الى جتاس وحينئذ يكون

$$\frac{فا ص}{فا س} = جتا س$$

أى

$$فا جاس = جتاس فا س$$

وهذا القانون حقيقى متى لم يكن س المتغير الغير المتعلق
بـ ٤٩ــد جيب التمام — يمكن استخراج تفاضل جيب التمام من تفاضل الجيب لان

$$جتاس = جا (\frac{ط}{2} - س)$$

وحينئذ يكون

$$فا جتاس = جتا (\frac{ط}{2} - س) فا (\frac{ط}{2} - س)$$

أو

$$فا جتاس = - جاس فا س$$

وهذا القانون حقيقى اذا لم يكن س متغيرا غير متعلق
بـ ٥٠ــد الظل — لاجل ايجاد تفاضل الظل نعلم ان

$$ظا س = \frac{جا س}{جتا س}$$

وحينئذ يكون

$$فا ظا س = \frac{جتاس فا جاس - جاس فا جتاس}{جتا^2 س}$$

أو

$$فا ظا س = \frac{جتا^2 س فا س + جا^2 س فا س}{جتا^2 س}$$

أو $$فا ظا س = \frac{فا س}{جتا^2 س}$$

وهذا القانون حقيقي متى لم يكن س متغيرا غير متعلق

ب ٥١ د ظل التمام — لاجل ايجاد تفاضل ظل التمام نعلم أن

$$\text{ظتاس} = \text{ظا}\left(\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}\right)$$

وحينئذ يكون

$$\text{فاظتاس} = -\frac{\text{فاس}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}$$

وهذا القانون حقيقي متى لم يكن س متغيرا غير متعلق

ب ٥٢ د القاطع — لاجل حساب تفاضل القاطع يوضع

$$\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$$

فيوجد أن

$$\text{فاقاس} = \frac{\text{حاس}}{\text{حتا}^{٢}\text{س}}\,\text{فاس}$$

وهذا القانون حقيقي متى لم يكن س هو المتغير الغير المتعلق

ب ٥٣ د قاطع التمام — لاجل ايجاد تفاضل قاطع التمام يكتب

$$\text{قتاس} = \frac{١}{\text{حاس}}$$

فيوجد أن

$$\text{فاقتاس} = -\frac{\text{حتاس}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}\,\text{فاس}$$

(في تفاضلات الدوال الدائرية العكسية)

ب ٥٤ د قوس الجيب — لتكن

$$\text{ص} = \text{قوس حاع}$$

(حرف ع رمز لدالة المتغير س) فيكون

$$\text{ع} = \text{حاص}$$

واذن يكون

$$\text{فاع} = \text{جتاص فاص}$$

ومن هنا يكون

$$فاص = \frac{فاو}{حتاص} = \frac{فاو}{\sqrt{١ - و^٢}}$$

أى

$$فاقوس جاو = \frac{فاو}{\sqrt{١ - جاو^٢}}$$

وينبغى أخذ الجذر الداخل فى هذا القانون باشارة عين اشارة جتاص

بـ ٥٥ د قوس جيب التمام — لتكن

$$ص = قوس جتاو$$

فيكون

$$و = جتاص$$

واذن يكون

$$فاو = - جاص فاص$$

ومن هنا يوجد أن

$$فاص = - \frac{فاو}{جاص} = - \frac{فاو}{\sqrt{١ - و^٢}}$$

أعنى أن $فاقوس جتاو = - \frac{فاو}{\sqrt{١ - و^٢}}$

وينبغى أخذ الجذر الداخل فى هذا القانون باشارة عين اشارة جاص

بـ ٥٦ د قوس الظل — لتكن

$$ص = قوس ظاو$$

فيكون $و = ظاص$

ومن هنا يكون

$$فاو = \frac{فاص}{حتاص^٢}$$

ومن هنا ينتج ان

$$فاص = فاو حتاص^٢ = \frac{فاو}{١ + و^٢}$$

وحينئذ يكون

$$\text{فاقوس ظاو} = \frac{\text{فاو}}{\text{١}+\text{و}^{\text{٢}}}$$

بند ٥٧ قوس ظل التمام — لتكن

$$\text{ص} = \text{قوس ظتاو}$$

فيكون

$$\text{و} = \text{ظتاص}$$

وحينئذ يستخرج

$$\text{فاص} = -\frac{\text{فاو}}{\text{١}+\text{و}^{\text{٢}}}$$

أعني أن

$$\text{فاقوس ظتاو} = -\frac{\text{فاو}}{\text{١}+\text{و}^{\text{٢}}}$$

بند ٥٨ قوس القاطع — ليكن

$$\text{ص} = \text{قوس قاو}$$

فيكون

$$\text{قاص} = \text{و}$$

وحينئذ يوجد أن

$$\text{فاقوس قاو} = \frac{\text{فاو}}{\text{و}\sqrt{\text{و}^{\text{٢}}-\text{١}}}$$

ويجب أخذ الجذر الداخل في هذا القانون بإشارة عين إشارة ظاص

بند ٥٩ قوس قاطع التمام — وليكن

$$\text{ص} = \text{قوس قتاو}$$

فيكون

$$\text{و} = \text{قتاص}$$

وحينئذ يوجد أن

$$\text{فاقوس قتاو} = -\frac{\text{فاو}}{\text{و}\sqrt{\text{و}^{\text{٢}}-\text{١}}}$$

وينبغي أخذ الجذر الداخل في هذا القانون بإشارة عين إشارة ظتاص

بند ٦٠

بند ٦٦ أمثلة — الاول

$$\text{فاقوس جا}\frac{\sqrt{2حس-س^2}}{ح}=\frac{\frac{1}{ح}\cdot\frac{2ح-2س}{2\sqrt{2حس-س^2}}}{\sqrt{1-\frac{2حس-س^2}{ح^2}}}\text{فاس}=\frac{\text{فاس}}{\sqrt{2حس-س^2}}$$

الثاني $$\text{فاقوس جا}\left(2س\sqrt{1-س^2}\right)=\frac{2\text{فاس}}{\sqrt{1-س^2}}$$

الثالث $$\text{فاقوس ظا}\frac{ى}{و}=\frac{و\text{فاى}-ى\text{فاو}}{ى^2+و^2}$$

وبهذا القانون يوجد أن

$$\text{فاقوس ظا}\frac{س}{\sqrt{1-س^2}}=\frac{\text{فاس}}{\sqrt{1-س^2}}$$

الرابع $$\text{فاقوس ظا}\frac{ى+و}{1-ىو}=\frac{(1-ىو)(\text{فاى}+\text{فاو})+(ى+و)(ى\text{فاو}+و\text{فاى})}{(ى+و)^2+(1-ىو)^2}$$

$$=\frac{(1+و^2)\text{فاى}+(1+ى^2)\text{فاو}}{(1+ى^2)(1+و^2)}$$

أو $$\text{فاقوس ظا}\frac{ى+و}{1-ىو}=\frac{\text{فاى}}{1+ى^2}+\frac{\text{فاو}}{1+و^2}$$

وهذا الناتج يمكن ادراكه من اول وهلة لان

$$\text{قوس ظا}\frac{ى+و}{1-ىو}=\text{قوس ظا}ى+\text{قوس ظا}و$$

(تمرينات)

١ $ص=هـ^{س^م}$ $$\text{فاص}=م\,س^{م-1}\,هـ^{س^م}\,\text{فاس}$$

٢ $ص=هـ^{\text{جاس}}$ $$\text{فاص}=\text{جتاس}\,هـ^{\text{جاس}}\,\text{فاس}$$

٣ $ص=هـ^{\text{ظاس}}$ $$\text{فاص}=(1+\text{ظا}^2\text{س})\,هـ^{\text{ظاس}}\,\text{فاس}$$

٤ $\text{ص}=\text{س}^{\text{حاس}}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\text{س}^{\text{حاس}}\left(\text{جتاس لوس}+\frac{\text{حاس}}{\text{س}}\right)\text{فاس}$

٥ $\text{ص}=\text{هـ}^{\text{قوس حاس}}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{١}{\sqrt{١-\text{س}^{٢}}}\,\text{هـ}^{\text{قوس حاس}}\,\text{فاس}$

٦ $\text{ص}=\text{هـ}^{-\text{س}^{٢}}\,\text{حتا ءس}$ $\qquad$ $\text{فاص}=-\text{هـ}^{-\text{س}^{٢}}\left(٢\text{س حتا ءس}+\text{ء حا ءس}\right)\text{فاس}$

٧ $\text{ص}=\text{لو جتاس}$ $\qquad$ $\text{فاص}=-\text{ظاس فاس}$

٨ $\text{ص}=\text{لو ظاس}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{٢\text{فاس}}{\text{حا}٢\text{س}}$

٩ $\text{ص}=\text{حا لوس}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{١}{\text{س}}\,\text{جتا لوس فاس}$

١٠ $\text{ص}=\text{حا}^{\text{م}}\text{س حتا}^{\text{ن}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\text{حا}^{\text{م}-١}\text{س حتا}^{\text{ن}-١}\text{س}\left(\text{م حتا}^{٢}\text{س}-\text{ن حا}^{٢}\text{س}\right)\text{فاس}$

١١ $\text{ص}=\text{قوس جا}\frac{\text{س}}{\sqrt{١+\text{س}^{٢}}}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{\text{فاس}}{١+\text{س}^{٢}}$

١٢ $\text{ص}=\text{قوس جتا}\frac{\text{ح حتاس}+\text{ء}}{\text{ء حتاس}+\text{ح}}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{\sqrt{\text{ح}^{٢}-\text{ء}^{٢}}}{\text{ء حتاس}+\text{ح}}\,\text{فاس}$

١٣ $\text{ص}=\text{قوس ظا}\left(\sqrt{١+\text{س}^{٢}}-\text{س}\right)$ $\qquad$ $\text{فاص}=-\frac{\text{فاس}}{٢(١+\text{س}^{٢})}$

١٤ $\text{ص}=\text{قوس ظا}\frac{\text{س}-\text{ح}}{\text{ء}-\text{س}}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{(\text{ء}-\text{ح})\text{فاس}}{(\text{س}-\text{ح})^{٢}+(\text{ء}-\text{س})^{٢}}$

١٥ $\text{ص}=\text{قوس ظا}\frac{\text{حس}+\text{ء}}{\text{هـ}}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{\text{ح هـ فاس}}{\text{هـ}^{٢}+(\text{حس}+\text{ء})^{٢}}$

١٦ $\text{ص}=\text{لو}\left(\text{قوس جتا}\sqrt{١-\text{س}^{٢}}\right)$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{\text{فاس}}{\sqrt{١-\text{س}^{٢}}\,\text{قوس جاس}}$

١٧ $\text{ص}=\text{لو}\frac{١-\text{حتاس}}{١+\text{حتاس}}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{\text{حاس}+\text{حتاس}}{\text{حا}^{٢}\text{س}}\,\text{فاس}$

١٨ $\text{ص}=\frac{\text{جاس}(٢+\text{هـ جتاس})}{(١+\text{هـ جتاس})^{٢}}$ $\qquad$ $\text{فاص}=\frac{٣\text{هـ}+(٢+\text{هـ}^{٢})\text{جتاس}}{(١+\text{هـ جتاس})^{٣}}\,\text{فاس}$

١٩ صه=قوس ظا $\left(\sqrt{\frac{ح-ى}{ح+ى}}\text{ظا}\frac{\text{سه}}{٢}\right)$ فاصه$=\frac{\sqrt{ح^٢-ى^٢}}{٢}\cdot\frac{\text{فاسه}}{ح+ى\,\text{حتاسه}}$

٢٠ صه=لو $\frac{ح+ى\,\text{ظاسه}}{ح-ى\,\text{ظاسه}}$ فاصه$=\frac{٢\,ح\,ى\,\text{فاسه}}{ح^٢\text{حتا}^٢\text{سه}-ى^٢\text{حا}^٢\text{سه}}$

(فى تفاضلات الدوال الغير المحلولة المعلومة بمعادلة واحدة)

بـ٦١ـد لنفرض دالة صه مرتبطة بمتغيرها بواسطة معادلة غير محلولة ولتكن

$$ى(\text{سه}\ و\ \text{صه})=٠$$

التى طرفها الاول دالة معلومة لمتغيرى سه و صه

فحيث ان صه دالة لمتغير سه فيمكن اعتبار ى(سه و صه) دالة مركبة وحيث ان هذه الدالة المركبة معدومة على الدوام فرضا فيكون تفاضلها وهو

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاسه}}\text{فاسه}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاصه}}\text{فاصه}$$

مساويا بالصفر وحينئذ توجد المعادلة

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاسه}}\text{فاسه}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاصه}}\text{فاصه}=٠$$

ومنها يحدث

$$\text{فاصه}=-\frac{\frac{\text{فاى}}{\text{فاسه}}}{\frac{\text{فاى}}{\text{فاصه}}}\text{فاسه}\quad\text{ويكون}\quad\frac{\text{فاصه}}{\text{فاسه}}=-\frac{\frac{\text{فاى}}{\text{فاسه}}}{\frac{\text{فاى}}{\text{فاصه}}}$$

فنشاهد ان مشتقة أى دالة غير محلولة معلومة بمعادلة واحدة تتحصل بقسمة مشتقة الطرف الاول لهذه المعادلة بالنسبة للمتغير الغير المتعلق على مشتقته بالنسبة للدالة معتبرة متغيرا غير متعلق وأخذ الناتج باشارة مخالفة لاشارته

بـ٦٢ـد أمثلة — الاول ليكن

$$ى(\text{سه}\ و\ \text{صه})=ح^٢\text{صه}^٢+ى^٢\text{سه}^٢-ح^٢ى^٢=٠$$

فهنا

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاسه}}=٢ى^٢\text{سه}\quad و\quad\frac{\text{فاى}}{\text{فاصه}}=٢ح^٢\text{صه}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{فاصہ}}{\text{فاسہ}}=-\frac{\text{ء}^{٢}\text{سہ}}{\text{ح}^{٢}\text{صہ}}$$

وفى هذه الحالة يمكن حل المعادلة بالنسبة للدالة صہ ويوجد

$$\text{صہ}=\frac{\text{ء}}{\text{ح}}\sqrt{\text{ح}^{٢}-\text{سہ}^{٢}}$$

والجذر الداخل فى هذا القانون يجب أخذه باشارة + وباشارة − فاذا وضع مقدار صہ هذا فى القانون المتقدم فان هذا القانون يؤل الى

$$\frac{\text{فاصہ}}{\text{فاسہ}}=\frac{-\text{ءسہ}}{\text{ح}\sqrt{\text{ح}^{٢}-\text{سہ}^{٢}}}$$

ويمكن ان يتحصل على هذا الناتج مباشرة بأخذ تفاضل مقدار صہ المتقدم

الثانى لتكن المعادلة

$$\text{ء}(\text{سہ}\ ,\ \text{صہ})=(\text{سہ}^{٢}+\text{صہ}^{٢})^{٢}-٢\text{ح}^{٢}(\text{سہ}^{٢}-\text{صہ}^{٢})=٠$$

التى تدل على منحن يسمى لمنسكات برنولى متى اعتبر سہ , صہ احداثيين عاديين فهنا

$$\frac{\text{فاء}}{\text{فاسہ}}=٤\text{سہ}(\text{سہ}^{٢}+\text{صہ}^{٢})-٤\text{ح}^{٢}\text{سہ}\quad ,\quad \frac{\text{فاء}}{\text{فاصہ}}=٤\text{صہ}(\text{سہ}^{٢}+\text{صہ}^{٢})+٤\text{ح}^{٢}\text{صہ}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\frac{\text{فاصہ}}{\text{فاسہ}}=-\frac{\text{سہ}(\text{سہ}^{٢}+\text{صہ}^{٢}-\text{ح}^{٢})}{\text{صہ}(\text{سہ}^{٢}+\text{صہ}^{٢}+\text{ح}^{٢})}$$

الثالث لتكن المعادلة

$$\text{سہ}^{٣}+\text{صہ}^{٣}-٣\text{حسہصہ}=٠$$

فيوجد أن

$$\frac{\text{فاصہ}}{\text{فاسہ}}=\frac{\text{حصہ}-\text{سہ}^{٢}}{\text{صہ}^{٢}-\text{حسہ}}$$

الرابع لتكن المعادلة

$$\text{ح}^{٢}\,\text{جا}\,\frac{\text{سہ}+\text{صہ}}{\text{ح}}=\text{سہصہ}$$

فيوجد

فيوجد أن

$$\frac{\text{فاصه}}{\text{فاسه}}=\frac{\text{صه}-\text{حجتا}\frac{\text{سه}+\text{صه}}{\text{ح}}}{\text{حجتا}\frac{\text{سه}+\text{صه}}{\text{ح}}-\text{سه}}$$

(فى حذف الثوابت الاختيارية)

بـ٦٣ـد لنعتبر معادلة ولتكن

$$\text{ء}(\text{سه}\ \text{و}\ \text{صه}\ \text{و}\ \text{ث})=٠ \qquad (١)$$

رابطة للمتغيرين سه و صه والثابت الاختيارى ث فبأخذ تفاضل طرفى هذه المعادلة يحدث

$$\frac{\text{فاء}}{\text{فاسه}}+\frac{\text{فاء}}{\text{فاصه}}\ \frac{\text{فاصه}}{\text{فاسه}}=٠ \qquad (٢)$$

فاذا حذفنا الثابت ث من المعادلتين (١) و (٢) تنتج معادلة مثل

$$\text{ء}\left(\text{سه}\ \text{و}\ \text{صه}\ \text{و}\ \frac{\text{فاصه}}{\text{فاسه}}\right)=٠ \qquad (٣)$$

واقعة بين المتغير الغير المتعلق سه والدالة صه ومشتقها وهى $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاسه}}$

وهذه المعادلة (٣) التى تنتج بأخذ تفاضل معادلة مشتملة على ثابت اختيارى يقال لها معادلة تفاضلية وبالنسبة لهذه المعادلة التفاضلية يطلق أحيانا على المعادلة (١) اسم معادلة أصلية

فاذا فرض أن المتغيرين سه و صه دالان على احداثيين مستقيمين وان الثابت ث يأخذ مقادير لا حصر لعددها فان المعادلة (١) تدل على عدة منحنيات من نوع واحد وتكون المعادلة (٣) دالة على خاصية للماس المشترك لجميع المنحنيات التى من النوع المذكور

مثلا لتكن المعادلة

$$\text{صه}^{٢}=٢\,\text{ح}\,\text{سه}$$

فنها يوجد أن

$$\text{صه}\,\text{فاصه}=\text{ح}\,\text{فاسه}$$

وبحذف الثابت ح توجد هذه المعادلة وهى

$$ص \frac{فاس}{فاص} = ٢س$$

ومن هذه المعادلة يتضح انه فى جميع القطاعات المكافئة المتحدة فى المحور والرأس يكون تحت المماس ضعف أفقى نقطة التماس مهما كانت الكمية الثابتة ٢ح

ولنأخذ المعادلة

$$ص^٢ = ٢حس + ح^٢$$

التى تدل على تتابع قطاعات مكافئة متحدة فى المحور والبورة فهذه المعادلة توصل بحذف الثابت ح الى المعادلة



$$ص \left(\frac{فاص}{فاس}\right)^٢ + ٢س \frac{فاص}{فاس} - ص = ٠$$

ومن هذه المعادلة يوجد أن

$$\frac{فاص}{فاس} = \frac{-س + \sqrt{س^٢ + ص^٢}}{ص}$$

أو

$$س + ص \frac{فاص}{فاس} = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$$

وبالتأمل فى شكل ٥ يرى ان $س = ب ح$ و $ص \frac{فاص}{فاس} = ح ى$ و $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = ب م$

فاذن يكون

$$ب م = ب ى$$

وحيث ان

$$ب م = ب ر$$

فيكون

$$ب ى = ب ر = ب م$$

أعنى انه فى كل قطع مكافئ تكون البورة متساوية البعد عن نقطتى تقابل المماس والعمودى بالمحور وعن نقطة التماس

(في تفاضل الدوال الغير المحلولة المعلومة بعدة معادلات)

بـ ٦٤ د ولنعتبر الآن دالتين ص , ع لمتغير واحد وليكن س غير محلولتين معلومتين بمعادلتين مثل

$$د(س , ص , ع)=٠ \qquad و$$

$$د_{١}(س , ص , ع)=٠$$

ولنفرض ان المطلوب ايجاد التفاضلين فاص , فاع بدون حل هاتين المعادلتين فلذلك يقال حيث ان ص , ع دالتان لمتغير س فتكون الدالتان د(س , ص , ع) و $د_{١}$(س , ص , ع) دالتين مركبتين وحيث ان هاتين الدالتين معدومتان فيكون تفاضلاهما معدومين كذلك وحينئذ يكون

$$\frac{فاد}{فاس}فاس+\frac{فاد}{فاص}فاص+\frac{فاد}{فاع}فاع=٠ \qquad و$$

$$\frac{فاد_{١}}{فاس}فاس+\frac{فاد_{١}}{فاص}فاص+\frac{فاد_{١}}{فاع}فاع=٠$$

ومن هاتين المعادلتين يستخرج مقدارا فاص , فاع وهما

$$فاص=\frac{\frac{فاد}{فاس}\frac{فاد_{١}}{فاع}-\frac{فاد}{فاع}\frac{فاد_{١}}{فاس}}{\frac{فاد}{فاع}\frac{فاد_{١}}{فاص}-\frac{فاد}{فاص}\frac{فاد_{١}}{فاع}}فاس \qquad و$$

$$فاع=\frac{\frac{فاد}{فاص}\frac{فاد_{١}}{فاس}-\frac{فاد}{فاس}\frac{فاد_{١}}{فاص}}{\frac{فاد}{فاع}\frac{فاد_{١}}{فاص}-\frac{فاد}{فاص}\frac{فاد_{١}}{فاع}}فاس$$

بـ ٦٥ د مثال — لنفرض المعادلتين

$$س^{٢}+ص^{٢}+ع^{٢}=ن^{٢} \qquad و$$

$$حس+ءص+هع=و$$

اللتين فيهما ى ، ح ، ء ، هـ ، و رموز لاعداد ثابتة معلومة فيوجد أن

$$سـ فاسـ + صـ فاصـ + ع فاع = ٠ \quad و$$

$$ح فاسـ + ء فاصـ + هـ فاع = ٠$$

ومن هاتين المعادلتين يستخرج القانون

$$\frac{فاسـ}{هـ صـ - ء ع} = \frac{فاصـ}{ح ع - هـ سـ} = \frac{فاع}{ء سـ - ح صـ}$$

الذى به يعلم التفاضلان فاصـ ، فاع للدالتين صـ ، ع

بـ ٦٦ د وبهذه الكيفية يجرى العمل فى الحالة العمومية التى تعتبر فيها دوال صـ ، ع ، ى ، ... عددها ﻫ لمتغير واحد غير متعلق وليكن سـ معلومة بمعادلات مثل

$$ء(سـ ، صـ ، ع ، ى ، ...) = ٠ \quad و$$

$$ء_{١}(سـ ، صـ ، ع ، ى ، ...) = ٠ \quad و$$

$$ء_{٢}(سـ ، صـ ، ع ، ى ، ...) = ٠ \quad و$$

. . . .

عددها ﻫ رابطة لهذه الدوال بمتغيرها الغير المتعلق لانه حيث كانت الدوال ء ، ء١ ، ء٢ ، ... مركبتين مقاديرها معدومة كما فى الحالتين المتقدمتين فتكون تفاضلاتها معدومة وحينئذ يكون

$$\frac{فاء}{فاسـ} فاسـ + \frac{فاء}{فاصـ} فاصـ + \frac{فاء}{فاع} فاع + \frac{فاء}{فاى} فاى + ... = ٠ \quad و$$

$$\frac{فاء_{١}}{فاسـ} فاسـ + \frac{فاء_{١}}{فاصـ} فاصـ + \frac{فاء_{١}}{فاع} فاع + \frac{فاء_{١}}{فاى} فاى + ... = ٠ \quad و$$

$$\frac{فاء_{٢}}{فاسـ} فاسـ + \frac{فاء_{٢}}{فاصـ} فاصـ + \frac{فاء_{٢}}{فاع} فاع + \frac{فاء_{٢}}{فاى} فاى + ... = ٠ \quad و$$

. . . .

وبهذه المعادلات التى عددها ﻫ تتعين مقادير تفاضلات الدوال صـ ، ع ، ى ، ... التى عددها ﻫ ويتحصل على هذه المعادلات بأخذ تفاضل المعادلات المفروضة أعنى بتسوية تفاضلات الاطراف الاول لهذه المعادلات المفروضة بصفر

الفصل الثالث

(فى التفاضلات برتب مختلفة للدوال ذات المتغير الواحد)

(فى المشتقات برتب مختلفة)

بند ٦٧ لتكن د(س) دالة لمتغير س ولتكن دَ(س) مشتقتها فنرمز بالرمز دً(س) لمشتقة دَ(س) وبالرمز دٌ(س) لمشتقة دً(س) وهكذا وبهذه الكيفية يتكون تتابع الدوال وهو

دَ(س) ، دً(س) ، دٌ(س) ، ... ، د^(ن)(س) ، ...

ويكون عدد هذه الدوال لانهائيا مالم تكن د(س) دالة جذرية وصحيحة والدالة د^(ن)(س) التى تشغل الرتبة النونية فى التتابع المتقدم يقال لها المشتقة برتبة ن للدالة د(س) أو المشتقة النونية للدالة د(س)

(فى التفاضلات برتب مختلفة)

بند ٦٨ قد علمنا (بند ١٧) ان تفاضل أى دالة مثل

ص = د(س) (١)

يكون مبينا بالقانون

فاص = صَ ح أو فاص = دَ(س) فاس (٢)

الذى فيه ح أو فاس رمز لزيادة اختيارية تعطى للمتغير الغير المتعلق والى الآن لم نفرض أى فرض كان على هذه الزيادة الا اننا نفرض هنا انها ثابتة أعنى غير متعلقة بالمتغير س

فاذا اخذنا تفاضل معادلة (٢) بفرض ان الكمية فاس ثابتة نجد أن

فافاص = فادَ(س) فاس = [دً(س) فاس] فاس = دً(س) فاس٢

ويقال للتفاضل فافاصہ التفاضـل الثانى للدالة صہ أوالتفاضل برتبة ثانية لهـذه الدالة ويبين هذا التفاضل بالرمز فا^{٢}صہ وحينئذ يكون

فا^{٢}صہ = ءً(سہ) فاسہ^{٢}

وكذا يكون مقدار تفاضل فا^{٢}صہ هو

فا فا^{٢}صہ = فاسہ^{٢} فاءً(سہ) = فاسہ^{٢} [ءً(سہ) فاسہ] = ءًّ(سہ) فاسہ^{٣}

ويبين هذا التفاضل بالرمز فا^{٣}صہ ويكون

فا^{٣}صہ = ءًّ(سہ) فاسہ^{٣}

وبادامة العمل بهذه الكيفية يحصل على التتابع

فاصہ و فا^{٢}صہ و فا^{٣}صہ و ... و فا^{ہ}صہ و ...

الذى كل حد منه تفاضل الحد السابق له والكمية فا^{ہ}صہ التى تشغل الرتبة النونية فى هذا التتابع يقال لها التفاضل برتبة ہ للدالة صہ ويكون مقدارها معينا بواسطة القانون

فا^{ہ}صہ = ء^{ہ}(سہ) فاسہ^{ہ} (٣)

ويمكن أيضا أن يكتب

ء^{ہ}(سہ) = فا^{ہ}صہ / فاسہ^{ہ} (٤)

ويتضح من هذا القانون ان المشتقة برتبة ہ لاى دالة تساوى خارج قسمة التفاضل برتبة ہ لهذه الدالة على القوة النونية لتفاضل المتغير الغير المتعلق

وهذا الرمز هو المستعمل غالبا للدلالة على المشتقات ويكتب قانون (٣) هكذا

فا^{ہ}صہ = فا^{ہ}صہ / فاسہ^{ہ}

ومن الواضح أنه يحصل على التفاضلات برتب مختلفة للدوال بواسطة القواعد التى ذكرناها فى الفصل السابق

بند ٦٩ التفاضلات برتب مختلفة لبعض دوال بسيطة — أولا لتكن

$$\text{ص}=\text{س}^{\text{م}}$$

فيوجد أن

$$\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}}=\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}\ ,\quad \frac{\text{فا}^{٢}\text{ص}}{\text{فا س}^{٢}}=\text{م}(\text{م}-١)\,\text{س}^{\text{م}-٢}\ ,\quad \cdots\ ,$$

$$\frac{\text{فا}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{فا س}^{\text{ن}}}=\text{م}(\text{م}-١)\cdots(\text{م}-\text{ن}+١)\,\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}$$

وثانيا لتكن

$$\text{ص}=\text{لو}\,\text{س}$$

فيوجد أن

$$\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}}=\frac{١}{\text{س}}=\text{س}^{-١}\ ,\quad \frac{\text{فا}^{٢}\text{ص}}{\text{فا س}^{٢}}=-\text{س}^{-٢}\ ,\quad \cdots\ ,$$

$$\frac{\text{فا}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{فا س}^{\text{ن}}}=(-١)^{\text{ن}-١}\times ١\times ٢\times ٣\cdots(\text{ن}-١)\,\text{س}^{-\text{ن}}$$

وثالثا لتكن

$$\text{ص}=\text{ح}^{\text{س}}$$

(حرف ح رمز لعدد ثابت) فيوجد أن

$$\frac{\text{فا ص}}{\text{فا س}}=\text{ح}^{\text{س}}\,\text{لو ح}\ ,\quad \frac{\text{فا}^{٢}\text{ص}}{\text{فا س}^{٢}}=\text{ح}^{\text{س}}\,\text{لو}^{٢}\text{ح}\ ,\quad \cdots\ ,\quad \frac{\text{فا}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{فا س}^{\text{ن}}}=\text{ح}^{\text{س}}\,\text{لو}^{\text{ن}}\text{ح}$$

وفي الحالة التي يكون فيها $\text{ح}=\text{ه}$ يكون

$$\frac{\text{فا}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{فا س}^{\text{ن}}}=\text{ه}^{\text{س}}=\text{ص}$$

ورابعا لتكن

$$\text{ص}=\text{جا}(\text{س}+\text{د})$$

(حرف د رمز لعدد ثابت) فيوجد أن

$$\frac{فا صہ}{فا سہ}=جتا(سہ+ل)=جا(سہ+ل+\frac{ط}{٢})$$

بحيث ان مشتقة جا(سہ+ل) تحصل باضافة الربع $\frac{ط}{٢}$ للثابت ل ومن هنا يستنتج انه مهما كان ہ يكون

$$\frac{فا^{ہ} صہ}{فا سہ^{ہ}}=جا(سہ+ل+ہ\frac{ط}{٢})$$

فاذا فرض ان ل=٠ و ل=$\frac{ط}{٢}$ بالتوالى يحدث

$$\frac{فا^{ہ} جا سہ}{فا سہ^{ہ}}=جا(سہ+ہ\frac{ط}{٢}) \quad , \quad \frac{فا^{ہ} جتا سہ}{فا سہ^{ہ}}=جتا(سہ+ہ\frac{ط}{٢})$$

(فى الفروق برتب مختلفة)

بند ٧٠ لتكن صہ=د(سہ) دالة المتغير سہ فالزيادة

$$ف صہ=د(سہ+ف سہ)-د(سہ)$$

يقال لها فرقا برتبة أولى أو فرقا اولا للدالة صہ بالنسبة للزيادة الثابتة ف سہ المتغير سہ وهذا الفرق وهو ف صہ دالة المتغير سہ وفرقها ف ف صہ يسمى فرقا برتبة ثانية أو فرقا ثانيا للدالة صہ ويرمز له بالرمز ف^{٢} صہ وكذا يقال للفرق ف ف^{٢} صہ فرقا برتبة ثالثة أو فرقا ثالثا للدالة صہ وهلم جرا بحيث اذا اعتبر التتابع

$$ف صہ \text{ و } ف^{٢} صہ \text{ و } ف^{٣} صہ \text{ و } \ldots \text{ و } ف^{ہ} صہ \text{ و } \ldots$$

الذى كل حد منه فرق للحد السابق له بالنسبة للزيادة ف سہ لمتغير سہ يكون الحد ف^{ہ} صہ الشاغل للرتبة النونية فرقا برتبة ہ أو فرقا نونيا للدالة صہ

بند ٧١ اذا قسمت الفروق المتتالية لدالة صہ على القوى المتتالية لزيادة المتغير تحصل نسب نهاياتها هى المشتقات المتتالية للدالة صہ واثبات هذه النظرية مؤسس على هذه الفائدة وهى

فائدة — لتكن د(سہ و ب) دالة المتغير سہ تشتمل على كمية ثابتة ب ومستمرة هى ومشتقتها $\frac{فا د(سہ و ب)}{فا سہ}$ بجميع مقادير سہ المحصورة بين نهايتين معلومتين ولتكونا

$س_١$ و $س_٢$ فاذا انعدمت الدالة ء(س , ب) مهما كان س بمقدار محصوص كمية ب وليكن $ب_١$ اقول ان المشتقة ءَ(س , ب) تنعدم أيضا مهما كان س المقدار $ب=ب_١$

لانه اذا كان المقداران س , س+ح محصورين بين $س_١$ و $س_٢$ يكون

$$ء(س+ح , ب)-ء(س , ب)=[ءَ(س , ب)+ل] ح$$

(ل صغيرة تميل الى الصفر حينما تميل الزيادة ح اليه) وحيث ان الطرف الاول يؤل الى الصفر متى جعل $ب=ب_١$ على حسب الفرض فيجب ان يؤل الطرف الثانى كذلك الى الصفر متى جعل $ب=ب_١$ وانه مهما كان س , ح يكون

$$[ءَ(س , ب_١)+لَ] ح=٠$$

(لَ ماتؤل اليه الكمية ل حينما تعوض فيها الكمية الثابتة ب بالمقدار $ب_١$ وهى تنعدم حينما تنعدم الزيادة ح)

فاذا قسمت هذه المعادلة على ح يحدث

$$ءَ(س , ب_١)+لَ=٠$$

فاذا جعل ح=٠ فى هذه المعادلة الاخيرة يحدث

$$ءَ(س , ب_١)=٠$$

وهو ما أردنا اثباته

بند ٧٢ ولنفرض الآن دالة لمتغير س ولتكن ص ونفرض ان هذه الدالة ومشتقاتها المعتبرة مستمرة بمقادير س المحصورة بين $س_١$ و $س_٢$ فبموجب تعريف المشتقات يكون

$$\frac{ف ص}{ف س}=\frac{فا ص}{فا س}+ل \qquad (١)$$

(حرف ل رمز الكمية تنعدم حينما ينعدم ف س) فيتضح من هذا القانون انه بدلا عن اجراء العملية $\frac{ف ص}{ف س}$ على الدالة ص يمكن اجراء العملية $\frac{فا ص}{فا س}$ على هذه الدالة بشرط أن يضاف للناتج كمية تنعدم حينما ينعدم ف س فاذا طبقنا هذا القانون على الدالة $\frac{ف ص}{ف س}$ يحدث

$$\frac{\text{ف}\,\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}}{\text{ف س}}=\frac{\text{فا}\,\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}}{\text{فا س}}+\text{لَ}=\frac{\text{فا}^{2}\text{ص}}{\text{فا س}^{2}}+\frac{\text{فا ل}}{\text{فا س}}+\text{لَ}$$

(لَ رمز لكمية تنعدم حينما ينعدم ف س) وحيث ان الكمية ل تنعدم مهما كان س حينما ينعدم ف س فبموجب الفائدة المتقدمة تنعدم المشتقة $\frac{\text{فا ل}}{\text{فا س}}$ أيضا حينما ينعدم ف س وحيث ان ف $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ يساوي خارج قسمة ف ف ص اي $\text{ف}^{2}\text{ص}$ على ف س^{2} فيمكننا ان نكتب

$$\frac{\text{ف}^{2}\text{ص}}{\text{ف س}^{2}}=\frac{\text{فا}^{2}\text{ص}}{\text{فا س}^{2}}+\text{ل}_{1} \qquad (2)$$

(ل₁ كمية تنعدم حينما ينعدم ف س)

ولنطبق القاعدة المبينة بالقانون (١) على الدالة $\frac{\text{ف}^{2}\text{ص}}{\text{ف س}^{2}}$ فنجد أن

$$\frac{\text{ف}\,\frac{\text{ف}^{2}\text{ص}}{\text{ف س}^{2}}}{\text{ف س}}=\frac{\text{فا}\,\frac{\text{ف}^{2}\text{ص}}{\text{ف س}^{2}}}{\text{فا س}}+\text{لَ}_{1}=\frac{\text{فا}^{3}\text{ص}}{\text{فا س}^{3}}+\frac{\text{فا ل}_{1}}{\text{فا س}}+\text{لَ}_{1}$$

(لَ_{1} كمية تنعدم حينما ينعدم ف س) وحيث ان ل_{1} تنعدم كذلك حينما ينعدم ف س فتنعدم المشتقة $\frac{\text{فا ل}_{1}}{\text{فا س}}$ كذلك حينما ينعدم ف س ويكون

$$\frac{\text{ف}^{3}\text{ص}}{\text{ف س}^{3}}=\frac{\text{فا}^{3}\text{ص}}{\text{فا س}^{3}}+\text{ل}_{2}$$

(ل_{2} كمية صغيرة تنعدم حينما ينعدم ف س)

ويمكن الاستمرار بهذه الكيفية الى ما لا نهاية بحيث اذا فرضنا ان المشتقات التي عددها ه للدالة ص مستمرة يوجد على العموم ان

$$\frac{\text{ف}^{\text{ه}}\text{ص}}{\text{ف س}^{\text{ه}}}=\frac{\text{فا}^{\text{ه}}\text{ص}}{\text{فا س}^{\text{ه}}}+\text{ل}$$

(حرف ل رمز لكمية تنعدم حينما ينعدم ف س) وحينئذ يكون

نها

$$\text{نها}\frac{\text{ف}^{\text{ه}}\text{صه}}{\text{ف سه}^{\text{ه}}}=\frac{\text{فا}^{\text{ه}}\text{صه}}{\text{فا سه}^{\text{ه}}}$$

فيتضح من هذا القانون ان المشتقة برتبة ه لاى دالة لمتغير سه هى نهاية نسبة الفرق النونى لهذه الدالة الى القوة النونية لزيادة المتغير

ويمكن أيضا أن يكتب

$$\text{ف}^{\text{ه}}\text{صه}=\frac{\text{فا}^{\text{ه}}\text{صه}}{\text{فا سه}^{\text{ه}}}\ \text{ف سه}^{\text{ه}}+\text{ل ف سه}^{\text{ه}}$$

وحيث ان ف سه = فا سه فلا يكون القسم الاول من هذا المقدار الجبرى الا $\text{فا}^{\text{ه}}\text{صه}$ وحينئذ يكون

$$\text{ف}^{\text{ه}}\text{صه}=\text{فا}^{\text{ه}}\text{صه}+\text{ل ف سه}^{\text{ه}}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{ف}^{\text{ه}}\text{صه}}{\text{فا}^{\text{ه}}\text{صه}}=1+\frac{\text{ل}}{\frac{\text{فا}^{\text{ه}}\text{صه}}{\text{فا سه}^{\text{ه}}}}$$

وحينئذ اذا كانت المشتقة $\frac{\text{فا}^{\text{ه}}\text{صه}}{\text{فا سه}^{\text{ه}}}$ مستمرة يكون

$$\text{نها}\frac{\text{ف}^{\text{ه}}\text{صه}}{\text{فا}^{\text{ه}}\text{صه}}=1$$

فى بيان المشتقات التى برتب مختلفة التى يتوصل اليها باعتبار دالة ذات عدة متغيرات

بند ٧٣ نظرية — اذا فرضت دالة مثل

$$\text{صه}=\text{د}(\text{ع}\ ,\ \text{و})$$

ذات متغيرين ع , و ومشتقتاها بالنسبة الى ع والى و وهما $\frac{\text{فا صه}}{\text{فا ع}}$ و $\frac{\text{فا صه}}{\text{فا و}}$ بالتناظر أقول ان مشتقة الدالة $\frac{\text{فا صه}}{\text{فا ع}}$ بالنسبة الى و تساوى مشتقة الدالة $\frac{\text{فا صه}}{\text{فا و}}$

بالنسبة الى ه أعنى ان

$$\frac{\text{فا}\,\frac{\text{فاص}}{\text{فاه}}}{\text{فاو}}=\frac{\text{فا}\,\frac{\text{فاص}}{\text{فاو}}}{\text{فاه}}$$

بشرط أن تكون الدوال ص و $\frac{\text{فاص}}{\text{فاه}}$ و $\frac{\text{فاص}}{\text{فاو}}$ دوال مستمرة لمتغيرى ه و و

لانه اذا زيد المتغير ه زيادة ما فه وأبقى المتغير و ثابتا يحدث

$$\text{د}(\text{ه}+\text{فه}\ ,\ \text{و})-\text{د}(\text{ه}\ ,\ \text{و})=\left(\frac{\text{فاه}}{\text{فاص}}+\text{ل}\right)\text{فه} \qquad (1)$$

وحرف ل الداخل فى هذا القانون رمز لدالة لمتغيرى ه , و وللزيادة فه وهذه الدالة تميل الى الصفر مهما كان المقدار الذى يعطى للمتغير و حينما تميل الزيادة فه اليه

فاذا آل المتغير و الى و+فو فى هذا القانون يؤل طرفه الاول الى

$$\text{د}(\text{ه}+\text{فه}\ ,\ \text{و}+\text{فو})-\text{د}(\text{ه}\ ,\ \text{و}+\text{فو})$$

وفى الطرف الثانى تؤل الدالة $\frac{\text{فاص}}{\text{فاه}}$ الى

$$\frac{\text{فاص}}{\text{فاه}}+\frac{\text{فا}\,\frac{\text{فاص}}{\text{فاه}}}{\text{فاو}}\,\text{فو}+\text{ے}\,\text{فو}$$

وحرف ے رمز لكمية تنعدم حينما تنعدم الزيادة فو) وتأخذ الدالة ل مقدارا جديدا بالصورة ل+لَ فو (لَ كمية نهايتها $\frac{\text{فال}}{\text{فاو}}$ حينما تميل الزيادة فو الى الصفر) وحيث يجب أن ينعدم هذا المقدار الجديد مهما كانت الزيادة فو متى انعدمت الزيادة فه فيلزم أن تنعدم الكمية لَ متى انعدمت الزيادة فه وحينئذ يكون

$$\left.\begin{aligned}&\text{د}(\text{ه}+\text{فه}\ ,\ \text{و}+\text{فو})-\text{د}(\text{ه}\ ,\ \text{و}+\text{فو})\\&=\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاه}}+\frac{\text{فا}\,\frac{\text{فاص}}{\text{فاه}}}{\text{فاو}}\,\text{فو}+\text{ے}\,\text{فو}\right)\text{فه}+(\text{ل}+\text{لَ}\,\text{فو})\,\text{فه}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

فاذا طرحنا المعادلة الاولى من الثانية وقسمنا طرفى المعادلة المتحصلة على فه فو يحدث

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{د(ى+فى\ ,\ و+فو)-د(ى+فى\ ,\ و)+د(ى\ ,\ و)}{فى فو}\\[2ex] =\dfrac{فا\dfrac{فا صه}{فاى}}{فاو}+ح+ل\end{array}\right\}\quad(٣)$$

فيشاهد ان نهاية الطرف الثانى وبالتبعية نهاية الطرف الاول تكون هى $\dfrac{فا\dfrac{فا صه}{فاى}}{فاو}$ متى مالت الزيادتان فى , فو الى الصفر

لكن اذا غير المتغير و أولا فى الدالة د(ى , و) ثم غير المتغير ى يشاهد كذلك ان $\dfrac{فا\dfrac{فا صه}{فاو}}{فاى}$ تكون هى نهاية الطرف الاول لمعادلة (٣) متى مالت الزيادتان فى , فو الى الصفر وحيث يجب ان تكون هاتان النهايتان متساويتين فيكون

$$\frac{فا\dfrac{فا صه}{فاى}}{فاو}=\frac{فا\dfrac{فا صه}{فاو}}{فاى}$$

وهو المطلوب

بند ٧٤ النظرية المهمة المتقدمة تحدث لنا واسطة سهلة لبيان المشتقات بكل رتبة التى يتوصل اليها باعتبار دالة ذات عدة متغيرات

فلتكن

$$صه=د(ى\ ,\ و\ ,\ ع\ ,\ \ldots)\qquad(١)$$

دالة ذات متغيرات ى , و , ع , ... عددها م فالمشتقات التى برتبة أولى المعينة العدد مأخوذة بالنسبة للمتغيرات ى , و , ع , ... تبين على التناظر هكذا

$$\frac{فا صه}{فاى}\ ,\ \frac{فا صه}{فاو}\ ,\ \frac{فا صه}{فاع}\ ,\ \ldots\qquad(٢)$$

كما ذكرناه آنفا والمشتقات التى برتبة ثانية هى التى يتحصل عليها باخذ مشتقات المشتقات التى برتبة اولى المبينة بالتتابع (٢) بالنسبة للمتغيرات المختلفة لكن حيث انه يمكن بموجب النظرية المتقدمة تغيير رتبة العمليتين اللتين تجريان على التوالى فلا يتحصل

على مشتقات متميزة برتبة ثانية الا بقدر $\frac{م(م+١)}{٢}$ اعنى بقدر عدد التوافيق التامة (المكررة الحروف) لحروف عددها م مثنى مثنى وهذه المشتقات التى برتبة ثانية يستدل عليها بالرموز

$$\frac{فا^٢ صه}{فا س^٢} ، \frac{فا^٢ صه}{فا س فا و} ، \frac{فا^٢ صه}{فا س فا ع} ، \ldots \qquad (٣)$$

التى فيها

$$\frac{فا^٢ صه}{فا س^٢} = \frac{فا \frac{فا صه}{فا س}}{فا س} ، \quad \frac{فا^٢ صه}{فا س فا و} = \frac{فا^٢ صه}{فا و فا س} = \frac{فا \frac{فا صه}{فا س}}{فا و} = \frac{فا \frac{فا صه}{فا و}}{فا س} ، \ldots$$

و يحصل على المشتقات برتبة ثالثة للدالة صه باخذ مشتقات المشتقات برتبة ثانية المبينة بالتتابع (٣) بالنسبة للمتغيرات المختلفة وهلم جرا

و يشاهد عموما ان عدد المشتقات التى برتبة ﻫ يساوى عدد التوافيق التامة لحروف عددها م نونا نونا اعنى يساوى

$$\frac{م(م+١)(م+٢)\ldots(م+ﻫ-١)}{١\times٢\times٣\ldots\times ﻫ}$$

لان العمليات التى عددها م التى يلزم اجراؤها لاجل تكوين احدى هذه المشتقات يمكن اجراؤها بموجب نظرية بـ ٧٣ د بترتيب حيثما تفق و يكون المقدار الجبرى العمومى للمشتقات برتبة ﻫ هكذا

$$\frac{فا^{ﻫ} صه}{فا س^{ل}\ فا و^{ى}\ فا ع^{ط} \ldots}$$

وحروف ل ، ى ، ط ، ... رموز لاعداد صحيحة موجبة أو معدومة مجموعها يساوى ﻫ والاس المأخوذ به تفاضل أحد المتغيرات فى المقام يدل على عدد عمليات التفاضل التى تجرى بالنسبة لهذا المتغير

* (فى حساب التفاضلات برتب مختلفة لدالة مركبة من عدة دوال) *

بـ ٧٥ د لتكن $صه = د(س ، و ، ع ، \ldots)$

دالة مركبة من دوال ى , و , ع , ... لمتغير واحد س عددها م فبموجب قاعدة بـ ٤٢ د يكون

$$\text{فاصه}=\frac{\text{فاصه}}{\text{فاى}}\text{فاى}+\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}\text{فاو}+\frac{\text{فاصه}}{\text{فاع}}\text{فاع}+\cdots \qquad (١)$$

وحيث ان كل حد من الطرف الثانى حاصل ضرب عاملين فبأخذ تفاضلى طرفى هذا القانون يحدث

$$\text{فا}^{٢}\text{صه}=\text{فا}\left(\frac{\text{فاصه}}{\text{فاى}}\right)\text{فاى}+\text{فا}\left(\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}\right)\text{فاو}+\text{فا}\left(\frac{\text{فاصه}}{\text{فاع}}\right)\text{فاع}+\cdots$$

$$+\frac{\text{فاصه}}{\text{فاى}}\text{فا}^{٢}\text{ى}+\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}\text{فا}^{٢}\text{و}+\frac{\text{فاصه}}{\text{فاع}}\text{فا}^{٢}\text{ع}+\cdots$$

فاذا طبقت القاعدة المبينة بقانون (١) على الدوال $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاى}}$, $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}$, $\frac{\text{فاصه}}{\text{فاع}}$, ... يحدث

$$\text{فا}\left(\frac{\text{فاصه}}{\text{فاى}}\right)=\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاى}^{٢}}\text{فاى}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاى فاو}}\text{فاو}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاى فاع}}\text{فاع}+\cdots \quad ,$$

$$\text{فا}\left(\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}\right)=\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاى فاو}}\text{فاى}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاو}^{٢}}\text{فاو}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاو فاع}}\text{فاع}+\cdots \quad ,$$

$$\text{فا}\left(\frac{\text{فاصه}}{\text{فاع}}\right)=\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاى فاع}}\text{فاى}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاو فاع}}\text{فاو}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاع}^{٢}}\text{فاع}+\cdots \quad ,$$

. . . .

وحينئذ يؤول مقدار فا²صه الى

$$\left.\begin{aligned}\text{فا}^{٢}\text{صه}=&\left(\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاى}^{٢}}\text{فاى}^{٢}+٢\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاى فاو}}+٢\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاى فاع}}+\cdots\right.\\&\left.+\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاو}^{٢}}\text{فاو}^{٢}+٢\frac{\text{فا}^{٢}\text{صه}}{\text{فاو فاع}}\text{فاو فاع}+\cdots\right)\\&+\left(\frac{\text{فاصه}}{\text{فاى}}\text{فا}^{٢}\text{ى}+\frac{\text{فاصه}}{\text{فاو}}\text{فا}^{٢}\text{و}+\frac{\text{فاصه}}{\text{فاع}}\text{فا}^{٢}\text{ع}+\cdots\right)\end{aligned}\right\}\quad (٢)$$

وبهذه الكيفية يحصل بالتوالي على التفاضلات $فا^{٣}صه$ و $فا^{٤}صه$ و ...

٧٦ـ الحالة التي تكون فيها الدوال المركبة خطية ــ اذا كانت جميع الدوال ى , و , ع , ... بالصورة حس+ء التي فيها حرفا ح و ء رمزان لكميتين ثابتتين يكون

$$فا^{٢}ى = ٠ \quad و \quad فا^{٢}و = ٠ \quad و \quad فا^{٢}ع = ٠ \quad و \quad ...$$

ويؤول قانون (٢) الى

$$فا^{٢}صه = \frac{فا^{٢}صه}{فاى^{٢}} فاى^{٢} + ٢ \frac{فا^{٢}صه}{فاى فاو} فاى فاو + ...$$

$$+ \frac{فا^{٢}صه}{فاو^{٢}} فاو^{٢} + ٢ \frac{فا^{٢}صه}{فاو فاع} فاو فاع + ...$$

ومقدار $فا^{٢}صه$ هذا يمكن الدلالة عليه دلالة بيانية بالقانون

$$فا^{٢}صه = \left(\frac{فاصه}{فاى} فاى + \frac{فاصه}{فاو} فاو + \frac{فاصه}{فاع} فاع + ... \right)^{(٢)} = (فاصه)^{(٢)}$$

وذلك بملاحظة انه بعد تكوين مربع فاصه تعوض العوامل

$$\left(\frac{فاصه}{فاى}\right)^{٢} \quad و \quad \left(\frac{فاصه}{فاى}\right)\left(\frac{فاصه}{فاو}\right) \quad و \quad ...$$

على التناظر بالمشتقات

$$\frac{فا^{٢}صه}{فاى^{٢}} \quad و \quad \frac{فا^{٢}صه}{فاى فاو} \quad و \quad ...$$

وهذه القاعدة عمومية فأقول انه مهما كان ن يكون

$$فا^{ن}صه = \left(\frac{فاصه}{فاى} فاى + \frac{فاصه}{فاو} فاو + \frac{فاصه}{فاع} فاع + ... \right)^{(ن)}$$

بشرط انه بعد تكوين القوة النونية للتفاضل فاصه تعوض العوامل التي بالصورة

$$\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاى}}\right)^{\text{ل}}\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاو}}\right)^{\text{ى}}\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاع}}\right)^{\text{ط}}\cdots$$

الداخلة فى كل حد بالمشتقات المناظرة لها وهى

$$\frac{\text{فا}^{\text{ل}+\text{ى}+\text{ط}+\cdots}\text{ص}}{\text{فاى}^{\text{ل}}\,\text{فاو}^{\text{ى}}\,\text{فاع}^{\text{ط}}\cdots}$$

لان القانون البيانى المتقدم يحدث المقدار الحقيقى للتفاضل $\text{فا}^{\text{ه}}\text{ص}$ متى كان $\text{ه}=١$ وحينئذ يكفى لاجل بيان صحته أن يثبت على انه اذا كان حقيقيا بالنسبة لرتبة ه يكون حقيقيا بالنسبة لرتبة $\text{ه}+١$ وحينئذ انفرض ان القانون حقيقى بالنسبة للدليل ه وليكن

$$\text{ح}_{\text{ا}}\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاى}}\right)^{\text{ل}}\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاو}}\right)^{\text{ى}}\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاع}}\right)^{\text{ط}}\cdots\ \text{فاى}^{\text{ل}}\,\text{فاو}^{\text{ى}}\,\text{فاع}^{\text{ط}}\cdots$$

حدا من تحليل القوة النونية للتفاضل فاص فيكون الحد المناظر له من مقدار $\text{فا}^{\text{ه}}\text{ص}$ هو

$$\text{ح}_{\text{ا}}\frac{\text{فا}^{\text{ل}+\text{ى}+\text{ط}+\cdots}\text{ص}}{\text{فاى}^{\text{ل}}\,\text{فاو}^{\text{ى}}\,\text{فاع}^{\text{ط}}\cdots}\ \text{فاى}^{\text{ل}}\,\text{فاو}^{\text{ى}}\,\text{فاع}^{\text{ط}}\cdots$$

ومن المعلوم انه لاجل ايجاد $\text{فا}^{\text{ه}+١}\text{ص}$ يلزم أخذ تفاضل $\text{فا}^{\text{ه}}\text{ص}$ ويتحصل من الحد الذى كتبناه هذا المجموع وهو

$$\text{ح}_{\text{ا}}\left(\frac{\text{فا}^{\text{ل}+\text{ى}+\cdots+١}\text{ص}}{\text{فاى}^{\text{ل}+١}\,\text{فاو}^{\text{ى}}\cdots}\text{فاى}+\frac{\text{فا}^{\text{ل}+\text{ى}+\cdots+١}\text{ص}}{\text{فاى}^{\text{ل}}\,\text{فاو}^{\text{ى}+١}\cdots}\text{فاو}+\cdots\right)\text{فاى}^{\text{ل}}\,\text{فاو}^{\text{ى}}\cdots$$

حيث ان فاى ، فاو ، فاع ، ... ثوابت وبموجب اصطلاحنا يمكن الدلالة على هذا الناتج هكذا

$$\text{ح}_{\text{ا}}\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاى}}\right)^{\text{ل}}\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاو}}\right)^{\text{ى}}\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاع}}\right)^{\text{ط}}\cdots\ \text{فاى}^{\text{ل}}\,\text{فاو}^{\text{ى}}\,\text{فاع}^{\text{ط}}\cdots$$

$$\times\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاى}}\text{فاى}+\frac{\text{فاص}}{\text{فاو}}\text{فاو}+\frac{\text{فاص}}{\text{فاع}}\text{فاع}+\cdots\right)$$

ويعلم من ذلك ان المقدار البيانى للتفاضل $فا^{ه+١}$ صه يكون هو $(فاصه)^{ه} \times فاصه$ أى $(فاصه)^{ه+١}$ وبذا تتضح صحة القضية المنطوق بها

فى القانون العمومى لحساب التفاضل برتبة ما لحاصل ضرب جملة دوال لمتغير واحد غير متعلق

بـ٧٧ـد لنبحث عن القانون العمومى الذى به يحصل على التفاضلات برتب مختلفة لحاصل ضرب جملة دوال لمتغير واحد غير متعلق فنقول

لنعتبر فى أول الامر حاصل ضرب دالتين ى و و فيكون

$$فا(ى و) = و فاى + ى فاو \qquad (١)$$

ويكون

$$فا^{٢}(ى و) = فا(و فاى) + فا(ى فاو) = (و فا^{٢}ى + فاو فاى) + (فاو فاى + ى فا^{٢}و)$$

أو

$$فا^{٢}(ى و) = و فا^{٢}ى + ٢ فاو فاى + ى فا^{٢}و \qquad (٢)$$

وبأخذ تفاضل هذا القانون يحدث

$$فا^{٣}(ى و) = و فا^{٣}ى + ٣ فاو فا^{٢}ى + ٣ فا^{٢}و فاى + ى فا^{٣}و \qquad (٣)$$

فيرى باختبار قوانين (١) و (٢) و (٣) انه متى مر من أى حد الى الحد التالى له تنقص رتبة تفاضلات ى بواحد وتزيد رتبة تفاضلات و بواحد ويرى خلاف ذلك ان المعاملات الرقمية تكون على التناظر عين المعاملات الرقمية لتحليلات القوى الاولى والثانية والثالثة لكمية ذات حدين وعلى العموم يكون

$$\left.\begin{aligned} فا^{ه}(ى و) &= و فا^{ه}ى + \frac{ه}{١} فاو فا^{ه-١}ى + \frac{ه(ه-١)}{١\times٢} فا^{٢}و فا^{ه-٢}ى + \cdots \\ &+ \frac{ه(ه-١)\cdots(ه-ك+١)}{١\times٢\cdots\times ك} فا^{ك}و فا^{ه-ك}ى + \cdots + (فا^{ه}و) ى \end{aligned}\right\} \quad (٤)$$

ولكون ان هذا القانون قد تحقق بالنسبة لمقادير ه = ١ و ٢ و ٣ فيكفى أن يثبت على انه اذا كان حقيقيا بالنسبة لرتبة ه يكون حقيقيا بالنسبة لرتبة ه + ١ ولذلك نأخذ

فأخذ تفاضل قانون (٤) ونكتب الاجزاء التى تحصل بأخذ تفاضل العوامل الثانية من الحدود المختلفة على صف واحد ونكتب الاجزاء التى تحصل بأخذ تفاضل الحدود الاول على صف آخر فيحدث

$$فا^{ه+١}(ىو)$$

$$= وفا^{ه+١} ى + \frac{ه}{١} فاوفاى + \frac{ه(ه-١)}{١×٢} فا^٢وفا^{ه-١} ى + \cdots + فا^ه وفاى$$

$$+ فاوفا^ه ى + \frac{ه}{١} فا^٢وفا^{ه-١} ى + \cdots + \frac{ه}{١} فا^ه وفاى + فا^{ه+١} و×ى$$

فاذا اختصرت الحدود المتشابهة يحدث قانون يستنتج بداهة من قانون (٤) بتغيير ه بعدد ه+١ وحينئذ يكون قانون (٤) عموميا

وقانون (٤) يمكن الدلالة عليه هكذا

$$فا^ه(ىو) = (فاى + فاو)^{(ه)}$$

وفى الحقيقة اذا حللت القوة النونية للمجموع فاى + فاو مع الاهتمام بضرب الحد الاول فى القوة التى أسها صفر للتفاضل فاو وضرب الحد الاخير فى القوة التى أسها صفر للتفاضل فاى ثم تعويض

$$(فاى)^ك \text{ و } (فاو)^ك$$

بالتفاضلين

$$فا^ك ى \text{ و } فا^ك و$$

على التناظر متى لم يكن ك مساويا للصفر وبالدالتين

$$ى \text{ و } و$$

متى كان ك معدوما فمن الواضح انه يحصل على قانون (٤)

بـ٧٨ـد ولنعتبر الآن حاصل ضرب دوال ى و و و ... و ع و ر عددها م فأقول انه يمكن وضع هذا القانون البيانى وهو

$$فا^ه(ىو\ldots ع ر) = (فاى + فاو + \cdots + فاع + فار)^{(ه)}$$

أعنى انه لاجل الحصول على التفاضل برتبة ه لحاصل الضرب ىو...ع ر يكفى تحليل القوة النونية للمجموع

فاح+فاو+...+فاع+فار

مع الاهتمام بادخال التفاضلات فاح ، فاو ، ... ، فاع ، فار بقوى أسهامصفر في الحدود التي لم تدخل فيها قوى هذه التفاضلات ثم تعويض القوى

فاح^ك ، فاو^ك ، ... ، فاع^ك ، فار^ك

بالتفاضلات برتبة ه وهي

فا^ك ح ، فا^ك و ، ... ، فا^ك ع ، فا^ك ر

وتعويض هذه التفاضلات بالدوال

ح ، و ، ... ، ع ، ر

متى كان ك مساويا للصفر

وقد أثبتناهذه القضية في حالة عاملين وحينئذ لاجل اثبات انها عمومية يكفي أن يثبت على انه اذا كانت صحيحة بالنسبة لحاصل ضرب عوامل عددها م-١ تكون صحيحة كذلك متى كان عدد العوامل م ولذلك نرمز بحرف صه لحاصل ضرب العوامل التي عددها م-١ وهي ح ، و ، ... ، ع فيكون

فا^ه(ح و ... ع ر)=فا^ه(صه ر)=(فاصه+فار)^ه

ولنعتبر حدا حيثما اتفق من تحليل هذه القوة وليكن

جـ^ه_ك فاصه^ك فار^(ه-ك)

فيوجب ما تقدم يحدث من هذا الحد المناظر له من فا^ه(ح و ... ع ر) وهو

جـ^ه_ك فا^ك صه فا^(ه-ك) ر

و بالفرض كان

فا^ك صه=(فاح+فاو+...+فاع)^ك

فحينئذ يكون الحد المناظر مكتوبا كتابة بيانية هو

جـ^ه_ك (فاح+فاو+...+فاع)^ك فار^(ه-ك)

وبجمع كافة الحدود يوجد أيضا هذا القانون البياني وهو

فا^ه(ح و ... ع ر)=(فاح+فاو+...+فاع+فار)^(ه)

في التفاضلات برتب مختلفة للدوال الغير المحاولة

بند ٧٩ لنعتبر أولا الحالة التي تكون فيها دالة واحدة لمتغير س ولتكن ص معينة بمعادلة معلومة ولتكن

$$\text{ى}(\text{س}\ ,\ \text{ص})=٠$$

فحيث كانت ص دالة للمتغير س فتكون ى(س , ص) دالة مركبة وحيث ان هذه الدالة ذات مقدار ثابت وهو الصفر فتكون تفاضلاتها بجميع الرتب معدومة وحينئذ اذا سويت هذه التفاضلات بالصفر ولوحظ ان فاس ثابت يحدث

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاس}}\ \text{فاس}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاص}}\ \text{فاص}=٠\quad \text{و}$$

$$\left(\frac{\text{فا}^{٢}\text{ى}}{\text{فاس}^{٢}}\ \text{فاس}^{٢}+٢\ \frac{\text{فا}^{٢}\text{ى}}{\text{فاس فاص}}\ \text{فاس فاص}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{ى}}{\text{فاص}^{٢}}\ \text{فاص}^{٢}\right)+\frac{\text{فاى}}{\text{فاص}}\ \text{فا}^{٢}\text{ص}=٠\quad \text{و}$$

$$\left(\frac{\text{فا}^{٣}\text{ى}}{\text{فاس}^{٣}}\ \text{فاس}^{٣}+٣\ \frac{\text{فا}^{٣}\text{ى}}{\text{فاس}^{٢}\text{فاص}}\ \text{فاس}^{٢}\text{فاص}+٣\ \frac{\text{فا}^{٣}\text{ى}}{\text{فاس فاص}^{٢}}\ \text{فاس فاص}^{٢}+\frac{\text{فا}^{٣}\text{ى}}{\text{فاص}^{٣}}\ \text{فاص}^{٣}\right)$$

$$+٣\left(\frac{\text{فا}^{٢}\text{ى}}{\text{فاس فاص}}\ \text{فاس}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{ى}}{\text{فاص}^{٢}}\ \text{فاص}\right)\text{فا}^{٢}\text{ص}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاص}}\ \text{فا}^{٣}\text{ص}=٠\quad \text{و}$$

. . . .

وبهذه القوانين تتعين التفاضلات فاص , $\text{فا}^{٢}\text{ص}$, $\text{فا}^{٣}\text{ص}$, ... بالتوالي

وبالتبعية تتعين المشتقات $\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}}$, $\frac{\text{فا}^{٢}\text{ص}}{\text{فاس}^{٢}}$, $\frac{\text{فا}^{٣}\text{ص}}{\text{فاس}^{٣}}$, ...

بند ٨٠ ولنعتبر الحالة الاعم وهي الحالة التي تعلم فيها معادلات عددها م ولتكن

$$(١)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{ى}(\text{س}\ ,\ \text{ص}\ ,\ \text{ع}\ ,\ \text{ه}\ ,\ ...)=٠\ ,\\ \text{ى}_{١}(\text{س}\ ,\ \text{ص}\ ,\ \text{ع}\ ,\ \text{ه}\ ,\ ...)=٠\ ,\\ \text{ى}_{٢}(\text{س}\ ,\ \text{ص}\ ,\ \text{ع}\ ,\ \text{ه}\ ,\ ...)=٠\ ,\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{array}\right.$$

واقعة بين متغير غير متعلق س ودوال ص , ع , ه , ... لهذا المتغير وعددها م فحيث كانت الدوال ص , ع , ه , ... دوال للمتغير س فتكون الدوال

ى و ى١ و ى٢ و ... دوال مركبة وحيث كانت مقادير هذه الدوال المركبة معدومة فتكون تفاضلاتها برتب مختلفة معدومة كذلك وحينئذ اذا أخذ تفاضل المعادلات (١) مرة واحدة توجد المعادلات

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\text{فاى}}{\text{فاس}}\text{فاس}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاص}}\text{فاص}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاع}}\text{فاع}+\cdots=0 ,\\
&\frac{\text{فاى}_1}{\text{فاس}}\text{فاس}+\frac{\text{فاى}_1}{\text{فاص}}\text{فاص}+\frac{\text{فاى}_1}{\text{فاع}}\text{فاع}+\cdots=0 ,\\
&\frac{\text{فاى}_2}{\text{فاس}}\text{فاس}+\frac{\text{فاى}_2}{\text{فاص}}\text{فاص}+\frac{\text{فاى}_2}{\text{فاع}}\text{فاع}+\cdots=0 ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

وبهذه المعادلات تتعين التفاضلات برتبة أولى وهى

فاص ، فاع ، فاو ، ...

كما شوهد فى بند ٦٦ واذا أخذ تفاضل المعادلات (٢) توجد المجموعة

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاس}^2}\text{فاس}^2+2\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاس فاص}}\text{فاس فاص}+\cdots\right)\\
&\quad+\left(\frac{\text{فاى}}{\text{فاص}}\text{فا}^2\text{ص}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاع}}\text{فا}^2\text{ع}+\cdots\right)=0 ,\\
&\left(\frac{\text{فا}^2\text{ى}_1}{\text{فاس}^2}\text{فاس}^2+2\frac{\text{فا}^2\text{ى}_1}{\text{فاس فاص}}\text{فاس فاص}+\cdots\right)\\
&\quad+\left(\frac{\text{فاى}_1}{\text{فاص}}\text{فا}^2\text{ص}+\frac{\text{فاى}_1}{\text{فاع}}\text{فا}^2\text{ع}+\cdots\right)=0 ,\\
&\left(\frac{\text{فا}^2\text{ى}_2}{\text{فاس}^2}\text{فاس}^2+2\frac{\text{فا}^2\text{ى}_2}{\text{فاس فاص}}\text{فاس فاص}+\cdots\right)\\
&\quad+\left(\frac{\text{فاى}_2}{\text{فاص}}\text{فا}^2\text{ص}+\frac{\text{فاى}_2}{\text{فاع}}\text{فا}^2\text{ع}+\cdots\right)=0 ,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

وبهذه المجموعة تتعين التفاضلات برتبة ثانية وهى

$$فا^{٢}ص ، فا^{٢}ع ، فا^{٢}ق ، ...$$

ويحصل على التفاضلات برتبة ثالثة بأخذ تفاضل المعادلات (٣) وهلم جرا

(فى تغيير المتغير الغير المتعلق)

بـ ٨١ د متى اعتبرت جملة متغيرات تتعلق باحدها فان المتغير الذى يعتبر متغيرا غير متعلق اى الذى يكون تفاضله كمية ثابتة يمكن انتخابه بالاختيار الا انه قد يتأتى انه يعلم بعد انتخاب هذا المتغير الغير المتعلق انه يكون الانفع انتخاب متغير آخر يجعل متغيرا غير متعلق فاذ ذاك يلزم تحويل قوانين المسئلة الى قوانين أخرى وهذا هو الغرض من المسئلة التى نحن بصددها والتى ننطق بها هكذا

ليكن س المتغير الذى كان قد جعل متغيرا غير متعلق وليكن ص احد المتغيرات الاخر المعتبرة ويراد ايجاد مقادير المشتقات

$$\frac{فاص}{فاس} ، \frac{فا^{٢}ص}{فا^{٢}س} ، \frac{فا^{٣}ص}{فا^{٣}س} ، ...$$

المأخوذة بفرض ان فاس ثابت بدلالة تفاضلات س ، ص معتبرين دالتين لمتغير واحد غير متعلق اياما كان

فلذلك نرمز بالرموز

$$صَ ، صً ، صًَ ، ...$$

لمشتقات ص مأخوذة بفرض ان س هو المتغير الغير المتعلق فيكون

$$فاص=صَ فاس ، فاصَ=صً فاس ، فاصً=صًَ فاس ، ... \quad (١)$$

وبموجب قاعدة بـ ٣٦ د تكون هذه القوانين حقيقية مهما كان المتغير الغير المتعلق ومن القانون الاول يحدث

$$صَ=\frac{فاص}{فاس} \quad (٢)$$

وهو نتيج معلوم وعلى مقتضاه تكون صَ خارج قسمة فاص على فاس فاذا طبقنا

على هذا القانون قاعدة اخذ تفاضل خارج قسمة فمهما كان المتغير الغير المتعلق يوجد أن

$$\text{فاصَ} = \frac{\text{فاسـ فا}^{٢}\text{صـ} - \text{فاصـ فا}^{٢}\text{سـ}}{\text{فاسـ}^{٢}}$$

لكن بموجب ثاني قوانين (١) يكون فاصَ مساويا للحاصل صَ فاسـ وحينئذ يكون

$$\text{صَ} = \frac{\text{فاسـ فا}^{٢}\text{صـ} - \text{فاصـ فا}^{٢}\text{سـ}}{\text{فاسـ}^{٣}} \qquad (٣)$$

فاذا طبقت قاعدة اخذ تفاضل خارج قسمة على هذا القانون يحدث

$$\text{فاصً} = \frac{\text{فاسـ}(\text{فاسـ فا}^{٣}\text{صـ} - \text{فاصـ فا}^{٣}\text{سـ}) - ٣\,\text{فا}^{٢}\text{سـ}(\text{فاسـ فا}^{٢}\text{صـ} - \text{فاصـ فا}^{٢}\text{سـ})}{\text{فاسـ}^{٤}}$$

ولكون ان فاصً = صً فاسـ فبموجب ثالث قوانين (١) يحدث

$$\text{صً} = \frac{\text{فاسـ}(\text{فاسـ فا}^{٣}\text{صـ} - \text{فاصـ فا}^{٣}\text{سـ}) - ٣\,\text{فا}^{٢}\text{سـ}(\text{فاسـ فا}^{٢}\text{صـ} - \text{فاصـ فا}^{٢}\text{سـ})}{\text{فاسـ}^{٥}} \qquad (٤)$$

وبهذه الكيفية يتحصل بالتوالي على $\text{صـ}^{(٤)}$ و $\text{صـ}^{(٥)}$ و ... ومن الواضح ان $\text{صـ}^{(ن)}$ يكون مدلولا عليها بواسطة تفاضلات سـ و صـ لغاية التفاضلات برتبة ن

فاذا فرض في قوانين (٢) و (٣) و (٤) و ... ان فاسـ ثابت توجد هذه القوانين المعلومة وهي

$$\text{صَ} = \frac{\text{فاصـ}}{\text{فاسـ}} \quad , \quad \text{صً} = \frac{\text{فا}^{٢}\text{صـ}}{\text{فاسـ}^{٢}} \quad , \quad \text{صً} = \frac{\text{فا}^{٣}\text{صـ}}{\text{فاسـ}^{٣}} \quad , \quad ...$$

فاذا اريد جعل صـ متغيرا غير متعلق أي جعل فاصـ = كمية ثابتة تؤل قوانين (٢) و (٣) و (٤) الى

$$\text{صَ} = \frac{١}{\left(\frac{\text{فاسـ}}{\text{فاصـ}}\right)} \quad , \quad \text{صً} = -\frac{\frac{\text{فا}^{٢}\text{سـ}}{\text{فاصـ}^{٢}}}{\left(\frac{\text{فاسـ}}{\text{فاصـ}}\right)^{٣}} \quad ,$$

$$\text{ص}''' = -\frac{\frac{\text{فاس}}{\text{فاص}}\cdot\frac{\text{فا}^{٣}\text{س}}{\text{فاص}^{٣}} - ٣\left(\frac{\text{فا}^{٢}\text{س}}{\text{فاص}^{٣}}\right)^{٢}}{\left(\frac{\text{فاس}}{\text{فاص}}\right)^{٥}} \quad \text{و} \ldots$$

وسيشاهد فيما بعد ان شاء الله تعالى ان الانفع غالبا بالنظر لتماثل القوانين عدم تعيين المتغير الغير المتعلق

(فى تغيير جميع المتغيرات)

بند ٨٤ المسئلة التى نريد حلها يمكن النطق بها هكذا

لتكن س و ص و ع و ... متغيرات تتعلق بواحد منها وليكن س المتغير الذى تفاضله معتبر ثابتا ولتكن ح دالة معلومة للمتغير س وللكميات

$$\text{ص} \ \text{و} \ \frac{\text{فاص}}{\text{فاس}} \ \text{و} \ \frac{\text{فا}^{٢}\text{ص}}{\text{فاس}^{٢}} \ \text{و} \ldots \ \text{و} \ \text{ع} \ \text{و} \ \frac{\text{فاع}}{\text{فاس}} \ \text{و} \ \frac{\text{فا}^{٢}\text{ع}}{\text{فاس}^{٢}} \ \text{و} \ldots \ \text{و} \ldots$$

ويراد ايجاد ما يؤل اليه مقدار ح متى غيرت المتغيرات س و ص و ع و ... بمتغيرات اخر ولتكن ك و ل و م و ... واعتبر احد هذه المتغيرات الاخيرة وليكن ك مثلا متغيرا غير متعلق

فلاجل حل هذه المسئلة يبتدأ بتحويل مقدار ح بواسطة القوانين المذكورة فى البند السابق بحيث لا يكون المتغير الغير المتعلق معينا فحينئذ تصير دالة للمتغيرات س و ص و ع و ... ولتفاضلاتها وحيث صار الامر كما اذا كانت المتغيرات س و ص و ع و ... معلومة بدلالة المتغيرات الجديدة ك و ل و م و ... فتوجد معادلات بالصورة

$$\text{س} = \text{د}(\text{ك} \ \text{و} \ \text{ل} \ \text{و} \ \text{م} \ \text{و} \ldots) \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{د}_{١}(\text{ك} \ \text{و} \ \text{ل} \ \text{و} \ \text{م} \ \text{و} \ldots)$$

$$\text{و} \quad \text{ع} = \text{د}_{٢}(\text{ك} \ \text{و} \ \text{ل} \ \text{و} \ \text{م} \ \text{و} \ldots) \quad \text{و} \ldots$$

ومن هذه المعادلات تستخرج بعمليات التفاضل مقادير

$$\text{فاس} \ \text{و} \ \text{فاص} \ \text{و} \ \text{فاع} \ \text{و} \ldots \ \text{و} \ \text{فا}^{٢}\text{س} \ \text{و} \ \text{فا}^{٢}\text{ص} \ \text{و} \ \text{فا}^{٢}\text{ع} \ \text{و} \ldots \ \text{و} \ldots$$

مع الاهتمام بملاحظة الفرض فال = كمية ثابتة طبقا للمنطوق وحينئذ لا يبقى الا وضع جميع هذه المقادير فى مقدار ح لاجل تتميم حل المسئلة

بـ ٨٣ـد تطبيق ـــ ليكن س , ص احداثيين عماديين لمنحن معلوم وليكن الاحداثى الاول وهو س مجعولا متغيرا غير متعلق ويراد معرفة ما تؤل اليه الدالة

$$\text{ح}=\frac{\left(1+\frac{\text{فا}\text{ص}^{2}}{\text{فا}\text{س}^{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فا}^{2}\text{ص}}{\text{فا}\text{س}^{2}}}$$

متى غير الاحداثيين العماديين س , ص بالاحداثيين القطبيين ه , و اللذين فيهما و مجعول متغيرا غير متعلق

فبواسطة قوانين بـ ٨١ـد يؤل مقدار ح الى

$$\text{ح}=\frac{\left(\text{فا}\text{س}^{2}+\text{فا}\text{ص}^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\text{فا}\text{س}\,\text{فا}^{2}\text{ص}-\text{فا}\text{ص}\,\text{فا}^{2}\text{س}}$$

وهنا ليس المتغير الغير المتعلق معينا

ومن المعلوم ان

$$\text{س}=\text{ه}\,\text{جتا}\,\text{و}\quad,\quad \text{ص}=\text{ه}\,\text{جا}\,\text{و}$$

وباخذ التفاضل يحدث

$$\text{فا}\text{س}=\text{فا}\text{ه}\,\text{جتا}\,\text{و}-\text{ه}\,\text{جا}\,\text{و}\,\text{فا}\text{و}\quad ,$$

$$\text{فا}\text{ص}=\text{فا}\text{ه}\,\text{جا}\,\text{و}+\text{ه}\,\text{جتا}\,\text{و}\,\text{فا}\text{و}$$

وباخذ التفاضل مرة جديدة وملاحظة ان فاو = كمية ثابتة يحدث

$$\text{فا}^{2}\text{س}=\text{فا}^{2}\text{ه}\,\text{جتا}\,\text{و}-2\,\text{فا}\text{ه}\,\text{جا}\,\text{و}\,\text{فا}\text{و}-\text{ه}\,\text{جتا}\,\text{و}\,\text{فا}\text{و}^{2}\quad ,$$

$$\text{فا}^{2}\text{ص}=\text{فا}^{2}\text{ه}\,\text{جا}\,\text{و}+2\,\text{فا}\text{ه}\,\text{جتا}\,\text{و}\,\text{فا}\text{و}-\text{ه}\,\text{جا}\,\text{و}\,\text{فا}\text{و}^{2}$$

ومن هذه القوانين يستنتج أن

$$\text{فا}\text{س}^{2}+\text{فا}\text{ص}^{2}=\text{فا}\text{ه}^{2}+\text{ه}^{2}\,\text{فا}\text{و}^{2}$$

وان

$$\text{فا}\text{س}\,\text{فا}^{2}\text{ص}-\text{فا}\text{ص}\,\text{فا}^{2}\text{س}=-\text{ه}\,\text{فا}^{2}\text{ه}\,\text{فا}\text{و}+2\,\text{فا}\text{ه}^{2}\,\text{فا}\text{و}+\text{ه}^{2}\,\text{فا}\text{و}^{3}$$

وحينئذ

وحينئذ يكون

$$ع=\frac{(فاهـ^٢+هـ^٢فاو^٢)^{\frac{٣}{٢}}}{-هـ فا^٢هـ فاو+٢فا^٢هـ فاو+هـ^٢فاو^٣}$$

أو

$$ع=\frac{\left(\frac{فاهـ^٢}{فاو^٢}+هـ^٢\right)^{\frac{٣}{٢}}}{هـ^٢+٢\frac{فاهـ^٢}{فاو^٢}-هـ\frac{فا^٢هـ}{فاو^٢}}$$

بـ٨٤د قد يتأتى فى المسائل التى يحتاج فيها التغيير المتغيرات أن لا تكون المتغيرات الاصلية معلومة مباشرة بدلالة المتغيرات الجديدة بل تكون مرتبطة بها بمعادلات تفاضلية معلومة ففى هذه الحالة قد يتأتى أحيانا ان المعادلات التفاضلية المعلومة تكفى هى والمعادلات التى تستنتج منها بعمليات أخذ التفاضل لحذف المتغيرات الاصلية الداخلة فى المقدار الجبرى اللازم تحويله مثلا لنأخذ الدالة

$$ع=\frac{\left(١+\frac{فاصـ^٢}{فاسـ^٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{فا^٢صـ}{فاسـ^٢}} \qquad (١)$$

التى اشتغلنا بها فى البند السابق ولنبحث عما يؤل اليه مقدار ع متى غير المتغيران سـ ، صـ بمتغيرين آخرين هـ ، ه مرتبطين بالمتغيرين الاولين بالمعادلتين

$$سـ^٢+صـ^٢=هـ^٢ \qquad و \qquad (٢)$$

$$فاسـ^٢+فاصـ^٢=فاه^٢ \qquad (٣)$$

وجعل فاه تفاضلا ثابتا

فنبتدئ بتحويل ع بحيث لا يكون المتغير الغير المتعلق معينا فنتحصل كما سبق على المقدار

$$\text{ح}=\frac{(\text{فاس}^{2}+\text{فاص}^{2})^{\frac{3}{2}}}{\text{فاس}\ \text{فا}^{2}\text{ص}-\text{فاص}\ \text{فا}^{2}\text{س}} \qquad (٤)$$

اذا علمت ذلك نأخذ تفاضلى المعادلتين (٢) و (٣) فيحدث

$$\text{س}\ \text{فاس}+\text{ص}\ \text{فاص}=\text{د}\ \text{فاد} \qquad (٥)$$

$$\text{فاس}\ \text{فا}^{2}\text{س}+\text{فاص}\ \text{فا}^{2}\text{ص}=٠ \qquad (٦)$$

وبأخذ تفاضل معادلة (٥) يحدث

$$(\text{س}\ \text{فا}^{2}\text{س}+\text{ص}\ \text{فا}^{2}\text{ص})+(\text{فاس}^{2}+\text{فاص}^{2})=\text{د}\ \text{فا}^{2}\text{د}+\text{فاد}^{2}$$

وبمراعاة قانون (٣) يحدث

$$\text{س}\ \text{فا}^{2}\text{س}+\text{ص}\ \text{فا}^{2}\text{ص}=\text{د}\ \text{فا}^{2}\text{د}+\text{فاد}^{2}-\text{فاه}^{2} \qquad (٧)$$

ومن قانونى (٦) و (٧) يحدث

$$(\text{ص}\ \text{فاس}-\text{س}\ \text{فاص})\ \text{فا}^{2}\text{س}=-(\text{د}\ \text{فا}^{2}\text{د}+\text{فاد}^{2}-\text{فاه}^{2})\ \text{فاص} \quad \text{و}$$

$$(\text{ص}\ \text{فاس}-\text{س}\ \text{فاص})\ \text{فا}^{2}\text{ص}=+(\text{د}\ \text{فا}^{2}\text{د}+\text{فاد}^{2}-\text{فاه}^{2})\ \text{فاس}$$

ومن هنا يكون

$$\text{فاس}\ \text{فا}^{2}\text{ص}-\text{فاص}\ \text{فا}^{2}\text{س}=\frac{(\text{د}\ \text{فا}^{2}\text{د}+\text{فاد}^{2}-\text{فاه}^{2})\ \text{فاه}^{2}}{\text{ص}\ \text{فاس}-\text{س}\ \text{فاص}}$$

وغير ذلك يعلم أن

$$\text{ص}\ \text{فاس}-\text{س}\ \text{فاص}=\sqrt{(\text{س}^{2}+\text{ص}^{2})(\text{فاس}^{2}+\text{فاص}^{2})-(\text{س}\ \text{فاس}+\text{ص}\ \text{فاص})^{2}}$$

$$=\text{د}\sqrt{\text{فاه}^{2}-\text{فاد}^{2}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{فاس}\ \text{فا}^{2}\text{ص}-\text{فاص}\ \text{فا}^{2}\text{س}=\frac{(\text{د}\ \text{فا}^{2}\text{د}+\text{فاد}^{2}-\text{فاه}^{2})\ \text{فاه}^{2}}{\text{د}\sqrt{\text{فاه}^{2}+\text{فاد}^{2}}} \qquad (٨)$$

وبواسطة

وبواسطة قانوني (٣) و (٨) يؤول مقدار ح الى

$$\text{ح}=\frac{\text{د فاهـ}\sqrt{\text{فاهـ}^{٢}-\text{فاد}^{٢}}}{\text{د فاد}^{٢}+\text{فاد}^{٢}-\text{فاهـ}^{٢}}$$

او

$$\text{ح}=\frac{\text{د}\sqrt{١-\frac{\text{فاد}^{٢}}{\text{فاهـ}^{٢}}}}{\text{د}\,\frac{\text{فاد}^{٢}}{\text{فاهـ}^{٢}}+\frac{\text{فاد}^{٢}}{\text{فاهـ}^{٢}}-١}$$

الفصل الرابع

في التفاضلات برتب مختلفة للدوال ذات العدة متغيرات الغير المتعلقة

في التفاضلات الجزئية والتفاضل الكلي لدالة ذات عدة متغيرات غير متعلقة

بند ٨٥ قد اشتغلنا في الفصول السابقة بالقواعد العمومية المتعلقة بالدوال ذات المتغير الواحد الغير المتعلق والآن نشتغل بالدوال ذات العدة متغيرات الغير المتعلقة فنقول لتكن

$$\text{ى} = \text{د}(\text{س} \,،\, \text{ص} \,،\, \text{ع} \,،\, \ldots \,،\, \text{ر})$$

دالة ذات متغيرات غير متعلقة عددها م وهي س ، ص ، ع ، ... ، ر ولنفرض ان مقادير المتغيرات محصورة بين النهايات المتناظرة وهي س_1 و س_2 ، ص_1 و ص_2 ، ع_1 و ع_2 ، ... ، ر_1 و ر_2 فنقول ان الدالة ى مستمرة بين هذه النهايات متى أعطيت لمتغيرات عددها م−١ من هذه المتغيرات مقادير معينة وكانت ى دالة مستمرة للمتغير الباقي

اذا علمت ذلك فانرمز بالرموز

$$\text{فس} \,،\, \text{فص} \,،\, \text{فع} \,،\, \ldots \,\text{فر}$$

للزيادات الاختيارية للمتغيرات الغير المتعلقة س، ص، ع، ... ، ر فتكون المقادير

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاس}}\text{فس} \,،\, \frac{\text{فاى}}{\text{فاص}}\text{فص} \,،\, \frac{\text{فاى}}{\text{فاع}}\text{فع} + \ldots + \frac{\text{فاى}}{\text{فار}}\text{فر}$$

هي تفاضلات ى معتبرة على التوالي دوال للمتغير الواحد س أو ص أو ع أو ... أو ر وبسبب أن س ، ص ، ع ، ... ، ر متغيرات غير متعلقة يكون

فس

ف س = فا س ، ف ص = فا ص ، ف ع = فا ع ، . . . ، ف ر = فا ر

بحيث يمكن كتابة التفاضلات المتقدمة هكذا

$$\frac{\text{فا ف}}{\text{فا س}}\,\text{فا س} \text{ ، } \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ص}}\,\text{فا ص} \text{ ، } \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ع}}\,\text{فا ع} \text{ ، } \dots \text{ ، } \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ر}}\,\text{فا ر}$$

ويقال لهذه التفاضلات التفاضلات الجزئية للدالة ف بالنسبة للمتغيرات س ، ص ، ع ، . . . ، ر بالتناظر وكذا يقال للمشتقات

$$\frac{\text{فا ف}}{\text{فا س}} \text{ ، } \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ص}} \text{ ، } \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ع}} \text{ ، } \dots \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ر}}$$

المشتقات الجزئية للدالة ف

بند ٨٦ يسمى تفاضلا كليا للدالة ذات عدة متغيرات غير متعلقة مجموع التفاضلات الجزئية المأخوذة بالنسبة للمتغيرات المذكورة ويستدل على هذا التفاضل الكلي بالرمز فا فعلى هذا يكون

$$\text{فا ف} = \frac{\text{فا ف}}{\text{فا س}}\,\text{فا س} + \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ص}}\,\text{فا ص} + \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ع}}\,\text{فا ع} + \dots + \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ر}}\,\text{فا ر}$$

ومن هذا التعريف تنتج النتائج الآتية وهي

الاولى اذا آلت أي دالة ف ذات عدة متغيرات غير متعلقة ولتكن س ، ص ، ع ، . . . ، ر الى كمية ثابتة بمقادير هذه المتغيرات المحصورة على التناظر بين نهايات مّا أقول ان تفاضلها الكلي فا ف يكون معدوما وبالعكس أي اذا كان تفاضل الدالة ف معدوما على الدوام فان هذه الدالة تؤل الى كمية ثابتة

لانه اذا آلت الدالة ف الى كمية ثابتة تكون المشتقات $\frac{\text{فا ف}}{\text{فا س}}$ ، $\frac{\text{فا ف}}{\text{فا ص}}$ ، . . . ، $\frac{\text{فا ف}}{\text{فا ر}}$ معدومة وحينئذ يكون التفاضل فا ف معدوما

واذا كان فا ف = ٠ أي اذا كان

$$\frac{\text{فا ف}}{\text{فا س}}\,\text{فا س} + \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ص}}\,\text{فا ص} + \dots + \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ر}}\,\text{فا ر} = 0$$

فبسبب أن فا س ، فا ص ، . . . ، فا ر كميات اختيارية يجب ان يكون

$$\frac{\text{فا ف}}{\text{فا س}} = 0 \text{ ، } \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ص}} = 0 \text{ ، } \dots \text{ ، } \frac{\text{فا ف}}{\text{فا ر}} = 0$$

ومن هذه القوانين يتبين أن ى غير متعلقة بالمتغيرات س و ص و ... و ر
واذن يكون

ى = كمية ثابتة

الثانية اذا لم تفترق أى دالتين مثل و و ح عن بعضهما الا بكمية ثابتة بجميع مقادير المتغيرات الغير المتعلقة س و ص و ... و ر المحصورة بين نهايات ما على التناظر فتفاضلا هاتين الدالتين يكونان متساويين وبالعكس أى اذا كان تفاضلا الدالتين و و ح متساويين فان هاتين الدالتين لا تفترقان عن بعضهما الا بكمية ثابتة
وهذه القضية منحصرة فى القضية المتقدمة لانه يمكن ان يفرض أن ى = و − ح

فى مقارنة زيادة أى دالة ذات عدة متغيرات بتفاضلها

بند ٨٧ لتكن

ى = د(س و ص و ع)

دالة ذات متغيرات س و ص و ع ولنرمز بالرمز ف ى للزيادة التى تأخذها الدالة ى متى اعطيت الزيادات الاختيارية وهى

ف س و ف ص و ف ع

للمتغيرات المذكورة على التناظر فباستعمال الطريقة التى اتبعناها لاجل اثبات قاعدة الدوال المركبة يحدث

د(س+ف س و ص و ع)−د(س و ص و ع)=[د١(س و ص و ع)+ل] ف س و (١)

د(س و ص+ف ص و ع)−د(س و ص و ع)=[د٢(س و ص و ع)+ح] ف ص و (٢)

د(س و ص و ع+ف ع)−د(س و ص و ع)=[د٣(س و ص و ع)+ط] ف ع (٣)

وحروف ل و ح و ط الداخلة فى هذه المعادلات رموز لدوال تميل الى الصفر متى مالت الزيادات ف س و ف ص و ف ع على التناظر اليه
فاذا غير س فقط فى معادلة (٢) ثم غير س و ص فى معادلة (٣) يحدث

د(س+ف س و ص+ف ص و ع)−د(س+ف س و ص و ع)
=[د٢(س+ف س و ص و ع)+حَ] ف ص و (٤)

د(س+ف س, ص+ف ص, ع+ف ع) − د(س+ف س, ص+ف ص, ع)
= [د٣(س+ف س, ص+ف ص, ع) + طَ] ف ع   (٥)

والدالة ـَ تنعدم متى انعدمت الزيادتان ف س و ف ص والدالة طَ تنعدم حينما تنعدم الزيادات ف س و ف ص و ف ع

فاذا أضيفت المعادلة (١) الى مجموع المعادلتين الاخيرتين (٤) و (٥) يحدث

د(س+ف س, ص+ف ص, ع+ف ع) − د(س, ص, ع)
= [د١(س, ص, ع) + ل] ف س + [د٢(س+ف س, ص, ع) + ـَ] ف ص
+ [د٣(س+ف س, ص+ف ص, ع) + طَ] ف ع

وبالرمز بحرفي ـً و طً لدالتين جديدتين تميلان الى الصفر يحدث

ف ق = [د١(س, ص, ع) ف س + د٢(س, ص, ع) ف ص + د٣(س, ص, ع) ف ع]
+ (ل ف س + ـً ف ص + طً ف ع)

او

ف ق = (فا ق / فا س) فا س + (فا ق / فا ص) فا ص + (فا ق / فا ع) فا ع + ل ف س + ـً ف ص + طً ف ع

او

ف ق = فا ق + ل ف س + ـً ف ص + طً ف ع

ومن هنا ينتج أن

ف ق / فا ق = ١ + (ل ف س + ـً ف ص + طً ف ع) / ((فا ق / فا س) فا س + (فا ق / فا ص) فا ص + (فا ق / فا ع) فا ع)

وبناء على ذلك اذا لم تكن المشتقات الجزئية

فا ق / فا س , فا ق / فا ص , فا ق / فا ع

معدومة كلها تميل النسبة ف ق / فا ق الى الواحد متى مالت الزيادات ف س و ف ص و ف ع الى الصفر بشرط أن لا تزال احدى نسب هذه الزيادات الى احدى هذه الزيادات اختيارية

نظرية تتعلق بحساب تفاضل دالة مركبة من عدة دوال ذات عدة متغيرات غير متعلقة

بـ٨٨ـد نظرية — اذا رمزنا بحرف ى لدالة ذات عدة متغيرات سه ، صه ، ع ، ... ، ر وكانت نفس هذه المتغيرات دوال لعدة متغيرات غير متعلقة أقول ان

$$\text{فاى}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاسه}}\,\text{فاسه}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاصه}}\,\text{فاصه}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاع}}\,\text{فاع}+\ldots+\frac{\text{فاى}}{\text{فار}}\,\text{فار}$$

كما لو كانت المتغيرات سه ، صه ، ع ، ... ، ر متغيرات غير متعلقة

ولاثبات ذلك نفرض ان ے ، ك ، ل ، ... ، ف هى المتغيرات الغير المتعلقة فاذا عوضنا سه ، صه ، ع ، ... ، ر بمقاديرها بدلالة المتغيرات ے ، ك ، ل ، ... ، ف يتحصل مقدار ى بدلالة هذه المتغيرات اذا تقرر هذا فبموجب التعريف يكون

$$\text{فاى}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاے}}\,\text{فاے}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاك}}\,\text{فاك}+\frac{\text{فاى}}{\text{فال}}\,\text{فال}+\ldots+\frac{\text{فاى}}{\text{فاف}}\,\text{فاف}$$

وحيث ان $\frac{\text{فاى}}{\text{فاے}}\,\text{فاے}$ هو التفاضل الجزئى للدالة ى معتبرة دالة للمتغير ے الذى تتعلق به الدوال سه ، صه ، ع ، ... ، ر فلو طبقت قاعدة حساب تفاضل الدوال المركبة من عدة دوال لمتغير واحد غير متعلق يحدث

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاے}}\,\text{فاے}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاسه}}\left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاے}}\,\text{فاے}\right)+\ldots+\frac{\text{فاى}}{\text{فار}}\left(\frac{\text{فار}}{\text{فاے}}\,\text{فاے}\right)$$

وبتطبيق هذه القاعدة أيضا يحدث

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاك}}\,\text{فاك}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاسه}}\left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاك}}\,\text{فاك}\right)+\ldots+\frac{\text{فاى}}{\text{فار}}\left(\frac{\text{فار}}{\text{فاك}}\,\text{فاك}\right)\quad ،$$

. . . . ،

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاف}}\,\text{فاف}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاسه}}\left(\frac{\text{فاسه}}{\text{فاف}}\,\text{فاف}\right)+\ldots+\frac{\text{فاى}}{\text{فار}}\left(\frac{\text{فار}}{\text{فاف}}\,\text{فاف}\right)$$

فاذا أضيفت جميع هذه المتساويات يتكون مقدار فاى وهو

$$\text{فاو}=\frac{\text{فاو}}{\text{فاس}}\left(\frac{\text{فاس}}{\text{فاى}}\text{فاى}+\frac{\text{فاس}}{\text{فاك}}\text{فاك}+\cdots+\frac{\text{فاس}}{\text{فاف}}\text{فاف}\right)$$

$$+\frac{\text{فاو}}{\text{فاص}}\left(\frac{\text{فاص}}{\text{فاى}}\text{فاى}+\frac{\text{فاص}}{\text{فاك}}\text{فاك}+\cdots+\frac{\text{فاص}}{\text{فاف}}\text{فاف}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\text{فاو}}{\text{فار}}\left(\frac{\text{فار}}{\text{فاى}}\text{فاى}+\frac{\text{فار}}{\text{فاك}}\text{فاك}+\cdots+\frac{\text{فار}}{\text{فاف}}\text{فاف}\right)$$

وحيث ان حواصل الجمع المضروبة على التناظر فى المشتقات الجزئية وهى

$$\frac{\text{فاو}}{\text{فاس}}\ ,\ \frac{\text{فاو}}{\text{فاص}}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{\text{فاو}}{\text{فار}}$$

الداخلة فى هذا القانون هى مقادير التفاضلات فاس و فاص و ... و فار فيكون

$$\text{فاو}=\frac{\text{فاو}}{\text{فاس}}\text{فاس}+\frac{\text{فاو}}{\text{فاص}}\text{فاص}+\cdots+\frac{\text{فاو}}{\text{فار}}\text{فار}$$

وهو المطلوب اثباته

نتيجة — قواعد أخذ تفاضل حواصل جمع وحواصل ضرب وخوارج قسم وقوى الدوال ذات المتغير الواحد يمكن تطبيقها لاخذ تفاضل الدوال ذات العدة متغيرات الغير المتعلقة

فى التفاضلات الجزئية والتفاضلات الكلية برتب أعلا للدوال ذات العدة متغيرات الغير المتعلقة

بند ٨٩ لتكن

$$\text{و}=\text{د}(\text{س و ص و ع و}\cdots\text{و ر})\qquad(١)$$

دالة ذات متغيرات عددها م وهى س و ص و ع و ... و ر فقد شوهد فى بند ٧٤

انه يمكن اعتبار مشتقات برتبة ن عددها يساوى $\frac{\text{م}(\text{م}+١)\cdots(\text{م}+\text{ن}-١)}{١\times٢\times\cdots\times\text{ن}}$

وبموجب بند ٧٣ يمكن تغيير العمليات التى عددها ن اللازمة لتكوين كل مشتقة من المشتقات التى رتبتها ن وهذه المشتقات تبين على وجه التعميم كما سبق ذكره بالمقدار

$$\frac{\text{فا}^{ن}\text{ع}}{\text{فاس}^{ل}\,\text{فاص}^{ك}\cdots\text{فار}^{ط}} \qquad (٢)$$

الذي فيه الحروف ل و ك و ... و ط تدل على أعداد صحيحة يمكن أن تكون معدومة ومجموعها يساوي ن والدوال المبينة بالمقدار الجبري (٢) يقال لها المشتقات الجزئية برتبة ن للدالة ع

وحيث كانت تفاضلات المتغيرات الغير المتعلقة اختيارية فتفرض ثابتة وحينئذ اذا وجب أن تجرى على ع عمليات تفاضل عددها ل تؤخذ بالنسبة للمتغير س وعمليات تفاضل عددها ك تؤخذ بالنسبة للمتغير ص وهكذا الى المتغير ر أي اذا وجب ان تجرى على ع عمليات تفاضل عددها ط تؤخذ بالنسبة الى ر يمكن اجراء هذه العمليات بترتيب حيثما اتفق وبذلك يتحصل على ناتج يستدل عليه بالرمز

$$\frac{\text{فا}^{ن}\text{ع}}{\text{فاس}^{ل}\,\text{فاص}^{ك}\cdots\text{فار}^{ط}}\,\text{فاس}^{ل}\,\text{فاص}^{ك}\cdots\text{فار}^{ط} \qquad (٣)$$

وحرف ن رمز للمجموع ل+ك+...+ط والدوال المختلفة الشامل لها القانون (٣) يقال لها التفاضلات الجزئية برتبة ن للدالة ع

بند ٩٠ ليكن فاع التفاضل الكلي للدالة ع فنرمز بالرمز $\text{فا}^{٢}\text{ع}$ للتفاضل الكلي فافاع للتفاضل فاع وبالرمز $\text{فا}^{٣}\text{ع}$ للتفاضل الكلي للتفاضل $\text{فا}^{٢}\text{ع}$ وهكذا بحيث انه اذا اعتبرنا التتابع

$$\text{فاع} ،\ \text{فا}^{٢}\text{ع} ،\ \text{فا}^{٣}\text{ع} ،\ \ldots ،\ \text{فا}^{ن}\text{ع} ،\ \ldots \qquad (٤)$$

يكون كل حد الاعلى التفاضل الكلي للحد السابق له

والدوال (٤) يقال لها التفاضلات الكلية للدالة ع برتبة أولى وبرتبة ثانية وهكذا

ومقدار التفاضل الكلي برتبة أولى هو

$$\text{فاع} = \frac{\text{فاع}}{\text{فاس}}\,\text{فاس} + \frac{\text{فاع}}{\text{فاص}}\,\text{فاص} + \cdots + \frac{\text{فاع}}{\text{فار}}\,\text{فار} \qquad (٥)$$

ومنه يستنتج ان التفاضل الكلي برتبة ن يمكن الدلالة عليه بالقانون

$\text{فا}^{ن}$

$$\text{فا}^{ن}\text{د} = \left(\frac{\text{فاد}}{\text{فاسه}}\,\text{فاسه} + \frac{\text{فاد}}{\text{فاصه}}\,\text{فاصه} + \cdots + \frac{\text{فاد}}{\text{فار}}\,\text{فار}\right)^{ن} \quad (٦)$$

بشرط انه بعد تحليل الطرف الثانى تعوض العوامل التى بالصورة

$$\left(\frac{\text{فاد}}{\text{فاسه}}\right)^{ل}\left(\frac{\text{فاد}}{\text{فاصه}}\right)^{ى}\cdots\left(\frac{\text{فاد}}{\text{فار}}\right)^{ط}$$

الداخلة فى حدود التحليل بالمشتقة الجزئية وهى

$$\frac{\text{فا}^{ل+ى+\cdots+ط}\,\text{د}}{\text{فاسه}^{ل}\,\text{فاصه}^{ى}\cdots\text{فار}^{ط}}$$

ويكفى لاجل ان يتحقق من صحة هذا القانون اجراء الاثبات الذى استعملناه فى بند ٧٦ حينما تكلمنا على كيفية حساب تفاضلات الدوال المركبة من دوال خطية لمتغير واحد ومن الواضح أن احدى هاتين المسئلتين عين الاخرى حيث ان تفاضلات المتغيرات ثابتة فى كلتى الحالتين وانه بذلك تكون عمليات التفاضل المتتالية تابعة لقانون واحد

بند ٩١ قانون (٥) المتقدم فى البند السابق يكون حقيقيا بموجب ما تقرر فى بند ٨٨ متى لم تكن سه و صه و ع و ... و ر متغيرات غير متعلقة لكن ليس قانون (٦) كذلك متى كان $ن > ١$ مالم تكن سه و صه و ع و ... و ر دوال خطية للمتغيرات الغير المتعلقة وفى الحالة العمومية لا تكون فاسه و فاصه و ... و فار ثابتة ويلزم لاجل تحصيل $\text{فا}^{٢}\text{د}$ أخذ تفاضل قانون (٥) باعتبار كل حد حاصل ضرب عاملين متغيرين وحيث ان قاعدة أخذ تفاضل حاصل ضرب يمكن تطبيقها على التفاضلات الكلية فيحدث

$$\text{فا}^{٢}\text{صه} = \left(\frac{\text{فاد}}{\text{فاسه}}\,\text{فاسه} + \frac{\text{فاد}}{\text{فاصه}}\,\text{فاصه} + \cdots + \frac{\text{فاد}}{\text{فار}}\,\text{فار}\right)^{٢}$$
$$+\left(\frac{\text{فاد}}{\text{فاسه}}\,\text{فا}^{٢}\text{سه} + \frac{\text{فاد}}{\text{فاصه}}\,\text{فا}^{٢}\text{صه} + \cdots + \frac{\text{فاد}}{\text{فار}}\,\text{فا}^{٢}\text{ر}\right)$$

ويمكن باتباع هذا السير حساب التفاضلات الكلية $\text{فا}^{٣}\text{د}$ و $\text{فا}^{٤}\text{د}$ و ...

الا أن الافضل فى اغلب الاحوال البحث عن كل من المشتقات الجزئية اللازمة لتكوين

التفاضلات الكلية المراد حسابها على حدتها وبذلك ترجع المسئلة الى حالة دوال ذات متغير واحد وحقيقة اذا رمزنا بحروف س و ص و ... و ر للمتغيرات الغير المتعلقة واريد حساب

$$\frac{فا^{ن} ى}{فا س^{ل} فا ص^{ے} \ldots}$$

يؤخذ تفاضل المعادلة

$$ى = د(س و ص و ع و \ldots و ر)$$

بالنسبة للمتغير س مرارا عددها ل فتحصل المشتقة $\frac{فا^{ل} ى}{فا س^{ل}}$ ثم يؤخذ تفاضل الناتج المحصل بالنسبة للمتغير ص مرارا عددها ے فتحصل المشتقة $\frac{فا^{ل+ے} ى}{فا س^{ل} فا ص^{ے}}$ وهكذا

في حساب التفاضلات برتب مختلفة للدوال الغير محلولة ذات العدة متغيرات الغير المتعلقة

بـ ٩٢ د الحال الاعم للدوال الغير المحلولة هي التي تعطى فيها معادلات عددها م واقعة بين متغيرات غير متعلقة عددها ن ودوال عددها م هذه المتغيرات وحيث كانت الاطراف الثانية للمعادلات المفروضة مفروضة معدومة فتكون الاطراف الاول دوال مركبة من دوال للمتغيرات الغير المتعلقة التي عددها ن ومقدارها صفر وبناء على ذلك تكون تفاضلاتها الكلية برتب مختلفة معدومة وحينئذ يمكن بواسطة عمليات تفاضل متتالية أن تستنتج من المعادلات المفروضة مجموعات جديدة بها تعلم بالتوالي التفاضلات الكلية برتبة أولى للدوال التي عددها م المعتبرة ثم تعلم التفاضلات الكلية برتبة ثانية وهلم جرا

بـ ٩٣ د الا انه بدلا عن حساب التفاضلات الكلية مباشرة يمكن البحث عن المشتقات الجزئية التي توجد في مقاديرها كل واحدة على حدتها وحساب هذه المشتقات يجرى على حسب قاعدة الدوال الغير المحلولة لمتغير واحد غير متعلق

مثلا

مثلا لنعتبر الحالة التي تعتبر فيها دالة واحدة ع لمتغيرين س و ص مرتبطين بالدالة بمعادلة معلومة ولتكن

$$\text{د}(\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع})=٠ \qquad (١)$$

ولتكن ح و ك المشتقتين الجزئيتين اللتين برتبة أولى وهما $\frac{\text{فاع}}{\text{فاس}}$ ، $\frac{\text{فاع}}{\text{فاص}}$ فيكون

$$\text{فاع}=\text{ح فاس}+\text{ك فاص}$$

وكذلك اذا رمزنا بحروف ه ، و ، ز للمشتقات الجزئية التي برتبة ثانية وهما $\frac{\text{فا}^٢\text{ع}}{\text{فاس}^٢}$ ، $\frac{\text{فا}^٢\text{ع}}{\text{فاس فاص}}$ ، $\frac{\text{فا}^٢\text{ع}}{\text{فاص}^٢}$ يحدث

$$\text{فا}^٢\text{ع}=\text{ه فاس}^٢+٢\text{و فاس فاص}+\text{ز فاص}^٢$$

وهكذا ويلزم أن ينتبه الى ان مقداري التفاضلين الكليين فاح ، فاك هما على التناظر

$$\text{فاح}=\text{ه فاس}+\text{و فاص} \quad \text{و}$$

$$\text{فاك}=\text{و فاس}+\text{ز فاص}$$

اذا علمت ذلك فلاجل ايجاد ح ، ك يؤخذ تفاضل المعادلة المفروضة باعتبار س متغيرا فقط ثم يؤخذ تفاضلها باعتبار ص متغيرا فقط فبذلك يحدث (راجع بند ٦١ ان شئت)

$$\frac{\text{فاد}}{\text{فاس}}+\text{ح}\frac{\text{فاد}}{\text{فاع}}=٠ \ ، \ \frac{\text{فاد}}{\text{فاص}}+\text{ك}\frac{\text{فاد}}{\text{فاع}}=٠ \qquad (٢)$$

ومن هنا يكون

$$\text{ح}=-\frac{\frac{\text{فاد}}{\text{فاس}}}{\frac{\text{فاد}}{\text{فاع}}} \ ، \ \text{ك}=-\frac{\frac{\text{فاد}}{\text{فاص}}}{\frac{\text{فاد}}{\text{فاع}}} \qquad (٣)$$

ولاجل ايجاد ه ، و ، ز يكفي أخذ تفاضل المعادلتين (٢) أو المعادلتين (٣) ان أريد فاذا أخذ تفاضل المعادلتين (٢) بالنسبة للمتغير س ثم بالنسبة للمتغير ص تحصل ثلاث معادلات متميزة وهي

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاس}^2}+2\text{ح}\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاس فاع}}+\text{ح}^2\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاع}^2}+\text{هـ}\frac{\text{فاى}}{\text{فاع}}=0 \quad \text{و}\\
&\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاس فاص}}+\text{ك}\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاس فاع}}+\text{ح}\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاص فاع}}+\text{ح ك}\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاع}^2}+\text{و}\frac{\text{فاى}}{\text{فاع}}=0 \quad \text{و}\\
&\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاص}^2}+2\text{ك}\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاص فاع}}+\text{ك}^2\frac{\text{فا}^2\text{ى}}{\text{فاع}^2}+\text{ز}\frac{\text{فاى}}{\text{فاع}}=0
\end{aligned}\right\}\ (٤)$$

و بهاتهء بين المشتقات الجزئية هـ , و , ز ويلزم أن يتنبه الى أنه يتحصل بأخذ تفاضل المعادلة الاولى من المعادلتين (٢) بالنسبة للمتغير ص على نفس الناتج الذى يتحصل عليه اذا أخذ تفاضل الثانية منهما بالنسبة للمتغير س

فاذا أخذ تفاضل المعادلات (٤) تتحصل المشتقات الجزئية التى برتبة ثالثة وهلم جرا

بـ٩٤د مثال — لتكن المعادلة

$$\text{س}^2+\text{ص}^2+\text{ع}^2=\text{ر}^2$$

الواقعة بين المتغيرين الغير المتعلقين س , ص والدالة ع لهذين المتغيرين فاذا أجرى العمل كما تقدم يكون

$$\text{فاع}=\text{ح فاس}+\text{ك فاص} \quad \text{و}$$
$$\text{فاح}=\text{هـ فاس}+\text{و فاص} \quad \text{و}$$
$$\text{فاك}=\text{و فاس}+\text{ز فاص}$$

و يوجد بالتوالى أن

$$\text{س}+\text{ح ع}=0 \quad \text{و} \quad \text{ص}+\text{ك ع}=0$$

ثم يوجد أن

$$1+\text{ح}^2+\text{هـ ع}=0 \quad \text{و} \quad \text{ح ك}+\text{و ع}=0 \quad \text{و} \quad 1+\text{ك}^2+\text{ز ع}=0$$

ومن هنا يستخرج أن

$$\text{ح}=-\frac{\text{س}}{\text{ع}} \quad \text{و} \quad \text{ك}=-\frac{\text{ص}}{\text{ع}} \quad \text{و}$$

$$\text{هـ}=-\frac{\text{س}^2+\text{ع}^2}{\text{ع}^3} \ , \quad \text{و}=-\frac{\text{س ص}}{\text{ع}^3} \ , \quad \text{ز}=-\frac{\text{ص}^2+\text{ع}^2}{\text{ع}^3}$$

نظرية تتعلق بالدوال المتجانسة

بند ٩٥ يقال ان الدالة ذات العدة متغيرات متجانسة وبدرجة م اذا ضرب كل متغير في كمية غير معينة ر ووجدت الدالة مضروبة في $ر^م$ والدرجة م يمكن ان تكون صحيحة أو كسرية وقد تكون موجبة أو معدومة أو سالبة ويقال لها درجة تجانس الدالة اذا تقرر هذا فلتكن د(س، ص، ع، ...) دالة متجانسة وبدرجة م ولتكن $د_١$(س، ص، ع، ...)، $د_٢$(س، ص، ع، ...)، ... مشتقاتها بالنسبة للمتغيرات س، ص، ... الخ فبموجب التعريف يكون

$$د(ر س، ر ص، ر ع، ...) = ر^م د(س، ص، ع، ...) \qquad (١)$$

فاذا أخذنا تفاضل الطرفين بالنسبة الى ر فقط يحدث

$$د_١(ر س، ر ص، ر ع، ...) س + د_٢(ر س، ر ص، ر ع، ...) ص + ...$$
$$= م ر^{م-١} د(س، ص، ع، ...)$$

فاذا جعلنا ر = ١ في هذه المتطابقة يحدث

$$س \frac{فاق}{فاس} + ص \frac{فاق}{فاص} + ع \frac{فاق}{فاع} + ... = م ق \qquad (٢)$$

وهذا هو القانون الذي تنحصر فيه نظرية الدوال المتجانسة الكثيرة الاستعمال في العلوم الرياضية ويمكن النطق به بأن يقال

اذا أخذت مشتقات أي دالة متجانسة ذات عدة متغيرات بالنسبة لكل متغير وضربت كل مشتقة في المتغير المأخوذة هذه المشتقة بالنسبة له فان مجموع حواصل الضرب التي يتحصل عليها يساوي حاصل ضرب الدالة المتجانسة المفروضة في درجة التجانس

ويمكن التنبيه على انه اذا فرض ان $ر = \frac{١}{س}$ في المتطابقة (١) يتحصل

$$\frac{د(س، ص، ع، ...)}{س^م} = د(١، \frac{ص}{س}، \frac{ع}{س}، ...)$$

ومن هنا يعلم انه اذا قسمت أي دالة متجانسة وبدرجة م على القوة الميمية لاحد متغيراتها فان الخارج لا يتعلق الا بنسب المتغيرات الاخر الى المتغير المذكور

فى تغيير المتغيرات الغير المتعلقة

بند ٩٦ المسئلة التى نريد حلها يمكن النطق بها هكذا

لتكن ف دالة ذات متغيرات س , ص , ع , ... عددها م فاذا اعتبرت المتغيرات س , ص , ع , ... دوال لمتغيرات جديدة عددها م ولتكن ى , ك , ل , ... تصير ف دالة لهذه المتغيرات الجديدة اذا تقرر هذا فيراد ايجاد المشتقات الجزئية وهى

$$\frac{\text{فاف}}{\text{فاس}} \ , \ \frac{\text{فاف}}{\text{فاص}} \ , \ \frac{\text{فاف}}{\text{فاع}} \ , \ \ldots \ ,$$

$$\frac{\text{فا}^{2}\text{ف}}{\text{فاس}^{2}} \ , \ \frac{\text{فا}^{2}\text{ف}}{\text{فاس فاص}} \ , \ \frac{\text{فا}^{2}\text{ف}}{\text{فاس فاع}} \ , \ \ldots \ ,$$

. . . .

المأخوذة بفرض س , ص , ع , ... متغيرات غير متعلقة بدلالة المشتقات الجزئية

$$\frac{\text{فاف}}{\text{فاى}} \ , \ \frac{\text{فاف}}{\text{فاك}} \ , \ \frac{\text{فاف}}{\text{فال}} \ , \ \ldots \ ,$$

$$\frac{\text{فا}^{2}\text{ف}}{\text{فاى}^{2}} \ , \ \frac{\text{فا}^{2}\text{ف}}{\text{فاى فاك}} \ , \ \frac{\text{فا}^{2}\text{ف}}{\text{فاى فال}} \ , \ \ldots \ ,$$

. . . .

المأخوذة بفرض ى , ك , ل , ... متغيرات غير متعلقة

وهنا المتغيرات الاصلية وهى س , ص , ع , ... معلومة بدلالة المتغيرات الجديدة وهى ى , ك , ل , ... وبالعكس أى ان هذه المتغيرات الجديدة دوال معلومة للمتغيرات الاصلية

وحينئذ اذا اعتبرنا ف دالة للمتغيرات ى , ك , ل , ... واعتبرنا ى , ك , ل , ... دوال للمتغيرات س , ص , ع , ... فان حل المسئلة المفروضة يستنتج مباشرة من قاعدة أخذ تفاضل الدوال المركبة

لانه فى الواقع يكون

فاف

$$\text{فاه} = \frac{\text{فاه}}{\text{فاى}}\,\text{فاى} + \frac{\text{فاه}}{\text{فاك}}\,\text{فاك} + \frac{\text{فاه}}{\text{فال}}\,\text{فال} + \dots \qquad (١)$$

ويكون

$$\left.\begin{array}{l}\text{فاى} = \frac{\text{فاى}}{\text{فاس}}\,\text{فاس} + \frac{\text{فاى}}{\text{فاص}}\,\text{فاص} + \frac{\text{فاى}}{\text{فاع}}\,\text{فاع} + \dots \quad ، \\ \text{فاك} = \frac{\text{فاك}}{\text{فاس}}\,\text{فاس} + \frac{\text{فاك}}{\text{فاص}}\,\text{فاص} + \frac{\text{فاك}}{\text{فاع}}\,\text{فاع} + \dots \quad ، \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (٢)$$

وحيث كانت المتغيرات ى ، ك ، ل ، ... معلومة بدلالة س ، ص ، ع ، ...
فتكون المشتقات $\frac{\text{فاى}}{\text{فاس}}$ ، ... ، $\frac{\text{فاك}}{\text{فاس}}$ ، ... دوال معلومة كذلك للمتغيرات س ، ص ، ع ، ... الا انه يجب حسابها بدلالة ى ، ك ، ل ، ... فاذا وضعت هذه المقادير في معادلة (١) تكون معاملات فاس ، فاص ، فاع ، ... هي المقادير الجبرية المطلوبة للمشتقات الجزئية وهي

$$\frac{\text{فاه}}{\text{فاس}} \;،\; \frac{\text{فاه}}{\text{فاص}} \;،\; \frac{\text{فاه}}{\text{فاع}} \;،\; \dots$$

بدلالة المتغيرات ى ، ك ، ل ، ... والمشتقات

$$\frac{\text{فاه}}{\text{فاى}} \;،\; \frac{\text{فاه}}{\text{فاك}} \;،\; \frac{\text{فاه}}{\text{فال}} \;،\; \dots$$

وبهذه الكيفية يجرى العمل لاجل حساب المشتقات ذات الرتب الاعلا فيوضع

$$\frac{\text{فا}\frac{\text{فاه}}{\text{فاس}}}{\text{فاس}} = \frac{\text{فا}\frac{\text{فاه}}{\text{فاس}}}{\text{فاى}}\,\text{فاى} + \frac{\text{فا}\frac{\text{فاه}}{\text{فاس}}}{\text{فاك}}\,\text{فاك} + \frac{\text{فا}\frac{\text{فاه}}{\text{فاس}}}{\text{فال}}\,\text{فال} + \dots$$

وحينئذ اذا عوضت $\frac{\text{فاه}}{\text{فاس}}$ الداخلة فى الطرف الثانى بالمقدار السابق تحصيله وعوضت التفاضلات فاى ، فاك ، فال ، ... بمقاديرها المستخرجة من قوانين (٢) تكون معاملات فاس ، فاص ، فاع ، ... دالة على المقادير المطلوبة للمشتقات الجزئية وهى

$$\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا س}^{٢}} \text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا س فا ص}} \text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا س فا ع}} \text{ ، } \ldots$$

وكذا اذا أجرى نفس هذا التعويض فى القانون

$$\text{فا}\frac{\text{فا ق}}{\text{فا ص}} = \frac{\text{فا}\frac{\text{فا ق}}{\text{فا ص}}}{\text{فا ى}}\text{فا ى} + \frac{\text{فا}\frac{\text{فا ق}}{\text{فا ص}}}{\text{فا ك}}\text{فا ك} + \frac{\text{فا}\frac{\text{فا ق}}{\text{فا ل}}}{\text{فا ل}}\text{فا ل} + \ldots$$

تحصل المقادير المطلوبة للمشتقات

$$\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا س فا ص}} \text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا ص}^{٢}} \text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا ص فا ع}} \text{ ، } \ldots$$

التى سبق حساب المشتقة الاولى منها وهلم جرا

ومن الواضح انه يمكن اتباع هذه الطريقة لحساب مشتقات كل رتبة

بـ ٩٧ د تطبيق — نقط الفراغ يمكن تحديد وضعها اما بثلاثة احداثيات قائمة س ، ص ، ع واما بثلاثة احداثيات قطبية ه ، و ، ر مرتبطة بالاحداثيات الاول بالقوانين

$$\text{س} = \text{ه جاو جتار} \text{ ، } \text{ص} = \text{ه جاو جار} \text{ ، } \text{ع} = \text{ه جتاو} \qquad (١)$$

أو

$$\text{ه} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}} \text{ ، } \text{جتاو} = \frac{\text{ع}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + \text{ع}^{٢}}} \text{ ، } \text{ظار} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \qquad (٢)$$

اذا تقرر هذا فالكمية ق معتبرة دالة للمتغيرات س ، ص ، ع ويراد حساب مشتقات ق برتبة اولى ورتبة ثانية وهى

$$\frac{\text{فا ق}}{\text{فا س}} \text{ ، } \frac{\text{فا ق}}{\text{فا ص}} \text{ ، } \frac{\text{فا ق}}{\text{فا ع}} \text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا س}^{٢}} \text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا س فا ص}} \text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا س فا ع}}$$

$$\text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا ص}^{٢}} \text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا ص فا ع}} \text{ ، } \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فا ع}^{٢}}$$

بدلالة المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرات الغير المتعلقة وهى ه ، و ، ر فمن قوانين (٢) يستخرج

فاه

$$\text{فاه} = \frac{\text{س فاس} + \text{ص فاص} + \text{ع فاع}}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2}} \quad ،$$

$$\text{فاو} = \frac{\text{ع}(\text{س فاس} + \text{ص فاص}) - (\text{س}^2 + \text{ص}^2)\,\text{فاع}}{(\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2)^{\frac{3}{2}}\ \text{جاو}} \quad ،$$

$$\text{فار} = \frac{(-\text{ص فاس} + \text{س فاص})\ \text{حتا}^2\text{ر}}{\text{س}^2}$$

وبملاحظة قوانين (١) يكون

$$\left.\begin{array}{l} \text{فاه} = \text{جاو جتار فاس} + \text{جاو جار فاص} + \text{جتاو فاع} \quad ، \\ \text{فاو} = \frac{1}{\text{ه}}\ \text{جتاو جتار فاس} + \frac{1}{\text{ه}}\ \text{جتاو جار فاص} - \frac{1}{\text{ه}}\ \text{جاو فاع} \quad ، \\ \text{فار} = -\frac{1}{\text{ه}}\ \frac{\text{جار}}{\text{جاو}}\ \text{فاس} + \frac{1}{\text{ه}}\ \frac{\text{جتار}}{\text{جاو}}\ \text{فاص} \end{array}\right\} \quad (٣)$$

فاذا وضعت مقادير فاه ، فاو ، فار هذه في القانون

$$\text{فاى} = \frac{\text{فاى}}{\text{فاه}}\ \text{فاه} + \frac{\text{فاى}}{\text{فاو}}\ \text{فاو} + \frac{\text{فاى}}{\text{فار}}\ \text{فار}$$

يحدث

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{فاى}}{\text{فاس}} = \frac{\text{فاى}}{\text{فاه}}\ \text{جاو جتار} + \frac{\text{فاى}}{\text{فاو}}\ \frac{\text{جتاو جتار}}{\text{ه}} - \frac{\text{فاى}}{\text{فار}}\ \frac{\text{جار}}{\text{ه جاو}} \quad ، \\ \frac{\text{فاى}}{\text{فاص}} = \frac{\text{فاى}}{\text{فاه}}\ \text{جاو جار} + \frac{\text{فاى}}{\text{فاو}}\ \frac{\text{جتاو جار}}{\text{ه}} + \frac{\text{فاى}}{\text{فار}}\ \frac{\text{جتار}}{\text{ه جاو}} \quad ، \\ \frac{\text{فاى}}{\text{فاع}} = \frac{\text{فاى}}{\text{فاه}}\ \text{جتاو} - \frac{\text{فاى}}{\text{فاو}}\ \frac{\text{جاو}}{\text{ه}} \end{array}\right\} \quad (٤)$$

ويلزم الآن تكوين التفاضلات الكلية للمشتقات

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاس}} \quad ، \quad \frac{\text{فاى}}{\text{فاص}} \quad ، \quad \frac{\text{فاى}}{\text{فاع}}$$

أى تكوين المشتقات الجزئية لهذه الكميات بالنسبة الى ه و و و ر فيوجد أن

(٥)

$$\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاس}\,\text{فاه}}=\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه}^2}\,\text{جاو جتار}+\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه فاو}}\cdot\frac{\text{حتاو حتار}}{\text{ه}}-\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه فار}}\cdot\frac{\text{حار}}{\text{ه جاو}}$$

$$-\frac{\text{فاع}}{\text{فاو}}\cdot\frac{\text{حتاو حتار}}{\text{ه}^2}+\frac{\text{فاع}}{\text{فار}}\cdot\frac{\text{حار}}{\text{ه}^2\,\text{جاو}}\ ,$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاس}\,\text{فاو}}=\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه فاو}}\,\text{جاو جتار}+\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاو}^2}\cdot\frac{\text{حتاو حتار}}{\text{ه}}-\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاو فار}}\cdot\frac{\text{حار}}{\text{ه جاو}}$$

$$+\frac{\text{فاع}}{\text{فاه}}\,\text{جتاو جتار}-\frac{\text{فاع}}{\text{فاو}}\cdot\frac{\text{حاو حتار}}{\text{ه}}+\frac{\text{فاع}}{\text{فار}}\cdot\frac{\text{حتاو حار}}{\text{ه حا}^2\text{و}}\ ,$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاس}\,\text{فار}}=\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه فار}}\,\text{جاو جتار}+\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاو فار}}\cdot\frac{\text{حتاو حتار}}{\text{ه}}-\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فار}^2}\cdot\frac{\text{حار}}{\text{ه جاو}}$$

$$-\frac{\text{فاع}}{\text{فاه}}\,\text{جاو جار}-\frac{\text{فاع}}{\text{فاو}}\cdot\frac{\text{حتاو حار}}{\text{ه}}-\frac{\text{فاع}}{\text{فار}}\cdot\frac{\text{حتار}}{\text{ه جاو}}\ ,$$

(٦)

$$\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاص}\,\text{فاه}}=\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه}^2}\,\text{جاو جار}+\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه فاو}}\cdot\frac{\text{حتاو حار}}{\text{ه}}+\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه فار}}\cdot\frac{\text{حتار}}{\text{ه جاو}}$$

$$-\frac{\text{فاع}}{\text{فاو}}\cdot\frac{\text{حتاو حار}}{\text{ه}^2}-\frac{\text{فاع}}{\text{فار}}\cdot\frac{\text{حتار}}{\text{ه}^2\,\text{جاو}}\ ,$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاص}\,\text{فاو}}=\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه فاو}}\,\text{جاو جار}+\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاو}^2}\cdot\frac{\text{حتاو حار}}{\text{ه}}+\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاو فار}}\cdot\frac{\text{حتار}}{\text{ه جاو}}$$

$$+\frac{\text{فاع}}{\text{فاه}}\,\text{جتاو جار}-\frac{\text{فاع}}{\text{فاو}}\cdot\frac{\text{حاو حار}}{\text{ه}}-\frac{\text{فاع}}{\text{فار}}\cdot\frac{\text{حتاو حتار}}{\text{ه حا}^2\text{و}}\ ,$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاص}\,\text{فار}}=\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاه فار}}\,\text{جاو جار}+\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فاو فار}}\cdot\frac{\text{حتاو حار}}{\text{ه}}+\frac{\text{فا}^2\text{ع}}{\text{فار}^2}\cdot\frac{\text{حتار}}{\text{ه جاو}}$$

$$+\frac{\text{فاع}}{\text{فاه}}\,\text{جاو جتار}+\frac{\text{فاع}}{\text{فاو}}\cdot\frac{\text{حتاو حتار}}{\text{ه}}-\frac{\text{فاع}}{\text{فار}}\cdot\frac{\text{حار}}{\text{ه جاو}}\ ,$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\text{فا}\frac{\text{فاق}}{\text{فاع}}}{\text{فاه}} &= \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه}^2}\,\text{جتاو} - \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فاو}}\,\frac{\text{حاو}}{\text{ه}} + \frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\,\frac{\text{حاو}}{\text{ه}^2} \quad \text{،} \\
\frac{\text{فا}\frac{\text{فاق}}{\text{فاع}}}{\text{فاو}} &= \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فاو}}\,\text{جتاو} - \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو}^2}\,\frac{\text{حاو}}{\text{ه}} - \frac{\text{فاق}}{\text{فاه}}\,\text{حاو} - \frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\,\frac{\text{جتاو}}{\text{ه}} \quad \text{،} \\
\frac{\text{فا}\frac{\text{فاق}}{\text{فاع}}}{\text{فار}} &= \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فار}}\,\text{جتاو} - \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو فار}}\,\frac{\text{حاو}}{\text{ه}}
\end{aligned}\right\} \ (٧)$$

فاذا جمعت المعادلات (٥) بعد ضربها بالتناظر فى المعادلات (٣) يوجد التفاضل الكلى للمشتقة $\frac{\text{فاق}}{\text{فاس}}$ وتكون معاملات فاس ، فاص ، فاع فى هذا المقدار الجبرى هى المقادير المطلوبة للمشتقات

$$\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس}^2} \quad \text{،} \quad \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس فاص}} \quad \text{،} \quad \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس فاع}}$$

وبمثل ذلك يتحصل على المشتقات الجزئية الاخرى باضافة المعادلات (٦) أو (٧) بالتوالى بعد ضربها فى المعادلات (٣) وبذلك يوجد أن

$$\begin{aligned}
\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس}^2} &= \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه}^2}\,\text{جا}^2\text{و جتا}^2\text{ر} + ٢\,\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فاو}}\,\frac{\text{حاو جتاو جتا}^2\text{ر}}{\text{ه}} - ٢\,\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فار}}\,\frac{\text{حار جتار}}{\text{ه}} \\
&+ \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو}^2}\,\frac{\text{جتا}^2\text{و جتا}^2\text{ر}}{\text{ه}^2} - ٢\,\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو فار}}\,\frac{\text{جتاو حار جتار}}{\text{ه}^2\,\text{جاو}} + \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فار}^2}\,\frac{\text{حا}^2\text{ر}}{\text{ه}^2\,\text{حا}^2\text{و}} \\
&+ \frac{\text{فاق}}{\text{فاه}}\,\frac{\text{جتا}^2\text{و جتا}^2\text{ر} + \text{حا}^2\text{ر}}{\text{ه}} + \frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\,\frac{(\text{حا}^2\text{ر} - ٢\,\text{حا}^2\text{و جتا}^2\text{ر})\,\text{جتاو}}{\text{ه}^2\,\text{جاو}} \\
&+ ٢\,\frac{\text{فاق}}{\text{فار}}\,\frac{\text{حار جتار}}{\text{ه}^2\,\text{حا}^2\text{و}} \quad \text{،}
\end{aligned}$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس فاص}}=\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه}^2}\,\text{جا}^2\text{و جار جتار}+2\,\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فاو}}\,\frac{\text{حاو حتاو حار حتار}}{\text{ه}}+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فار}}\,\frac{\text{حتا}^2\text{ر}-\text{حا}^2\text{ر}}{\text{ه}}$$

$$+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو}^2}\,\frac{\text{حتا}^2\text{و حار حتار}}{\text{ه}^2}+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو فار}}\,\frac{(\text{حتا}^2\text{ر}-\text{حا}^2\text{ر})\,\text{جتاو}}{\text{ه}^2\,\text{جاو}}-\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فار}^2}\,\frac{\text{حار حتار}}{\text{ه}^2\,\text{حا}^2\text{و}}$$

$$-\frac{\text{فاق}}{\text{فاه}}\,\frac{\text{حا}^2\text{و حار حتار}}{\text{ه}}-\frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\,\frac{(1+2\,\text{حا}^2\text{و})\,\text{جتاو جار جتار}}{\text{ه}^2\,\text{جاو}}-\frac{\text{فاق}}{\text{فار}}\,\frac{\text{حتا}^2\text{ر}-\text{حا}^2\text{ر}}{\text{ه}^2\,\text{حا}^2\text{و}}\ ،$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس فاع}}=\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه}^2}\,\text{جاو جتاو جتار}+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فاو}}\,\frac{(\text{حتا}^2\text{و}-\text{حا}^2\text{و})\,\text{جتار}}{\text{ه}}-\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فار}}\,\frac{\text{حتاو حار}}{\text{ه جاو}}$$

$$-\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو}^2}\,\frac{\text{حاو حتاو حتار}}{\text{ه}^2}+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو فار}}\,\frac{\text{حار}}{\text{ه}^2}-\frac{\text{فاق}}{\text{فاه}}\,\frac{\text{حاو حتاو حتار}}{\text{ه}}$$

$$-\frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\,\frac{(\text{حتا}^2\text{و}-\text{حا}^2\text{و})\,\text{جتار}}{\text{ه}^2}\ ،$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاص}^2}=\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه}^2}\,\text{جا}^2\text{و جا}^2\text{ر}+2\,\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فاو}}\,\frac{\text{حاو حتاو حا}^2\text{ر}}{\text{ه}}+2\,\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فار}}\,\frac{\text{حار حتار}}{\text{ه}}$$

$$+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو}^2}\,\frac{\text{حتا}^2\text{و حا}^2\text{ر}}{\text{ه}^2}+2\,\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو فار}}\,\frac{\text{حتاو حار حتار}}{\text{ه}^2\,\text{جاو}}+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فار}^2}\,\frac{\text{حتا}^2\text{ر}}{\text{ه}^2\,\text{حا}^2\text{و}}$$

$$+\frac{\text{فاق}}{\text{فاه}}\,\frac{\text{حتا}^2\text{و حا}^2\text{ر}+\text{حتا}^2\text{ر}}{\text{ه}}+\frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\,\frac{(\text{حتا}^2\text{ر}-2\,\text{حا}^2\text{و حا}^2\text{ر})\,\text{جتاو}}{\text{ه}^2\,\text{حاو}}-2\,\frac{\text{فاق}}{\text{فار}}\,\frac{\text{حار حتار}}{\text{ه}^2\,\text{حا}^2\text{و}}$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاص فاع}}=\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه}^2}\,\text{جاو جتاو جار}+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فاو}}\,\frac{(\text{حتا}^2\text{و}-\text{حا}^2\text{و})\,\text{جار}}{\text{ه}}+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاه فار}}\,\frac{\text{حتاو حتار}}{\text{ه جاو}}$$

$$-\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو}^2}\,\frac{\text{حاو حتاو حار}}{\text{ه}^2}-\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاو فار}}\,\frac{\text{حتار}}{\text{ه}^2}-\frac{\text{فاق}}{\text{فاه}}\,\frac{\text{حاو حتاو حار}}{\text{ه}}$$

$$-\frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\,\frac{(\text{حتا}^2\text{و}-\text{حا}^2\text{و})\,\text{جار}}{\text{ه}^2}\ ،$$

$$\frac{\text{فا}^{2}\text{ح}}{\text{فاع}^{2}}=\frac{\text{فا}^{2}\text{ح}}{\text{فاه}^{2}}\,\text{حتا}^{2}\text{و}-2\,\frac{\text{فا}^{2}\text{ح}}{\text{فاه}\,\text{فاو}}\,\frac{\text{حاو}\,\text{حتاو}}{\text{ه}}+\frac{\text{فا}^{2}\text{ح}}{\text{فاو}^{2}}\,\frac{\text{حا}^{2}\text{و}}{\text{ه}^{2}}$$

$$+\frac{\text{فاح}}{\text{فاه}}\,\frac{\text{حا}^{2}\text{و}}{\text{ه}}+2\,\frac{\text{فاح}}{\text{فاو}}\,\frac{\text{حاو}\,\text{حتاو}}{\text{ه}^{2}}$$

بند ٩٨ و يمكن غالبا اختصار الحسابات اللازمة لاجل اجراء عملية تغيير المتغيرات باستعمال تحليلات مناسبة ولنمثل لذلك بمثال فنقول

المطلوب معرفة ما يؤل اليه المقدار

$$\text{ر}=\frac{\text{فا}^{2}\text{ح}}{\text{فاس}^{2}}+\frac{\text{فا}^{2}\text{ح}}{\text{فاص}^{2}}+\frac{\text{فا}^{2}\text{ح}}{\text{فاع}^{2}} \qquad (1)$$

اذا عوضت الاحداثيات العادية س , ص , ع بالاحداثيات القطبية ه , و , ر فيحصل مباشرة على حل هذه المسئلة باستعمال قوانين البند السابق الا اننا نريد اجراء التحويل بدون استعمال هذه القوانين

ولذلك نعوض في أول الامر س , ص بالمتغيرين ل , ر بحيث يكون

$$\text{س}=\text{ل}\,\text{جتار} \quad , \quad \text{ص}=\text{ل}\,\text{جار}$$

أو

$$\text{ل}=\sqrt{\text{س}^{2}+\text{ص}^{2}} \quad , \quad \text{ظار}=\frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

اللذين منهما يستخرج

$$\text{فال}=\frac{\text{س}\,\text{فاس}+\text{ص}\,\text{فاص}}{\sqrt{\text{س}^{2}+\text{ص}^{2}}}=\text{جتار}\,\text{فاس}+\text{جار}\,\text{فاص} \qquad \text{و}$$

$$\text{فار}=\frac{(\text{س}\,\text{فاص}-\text{ص}\,\text{فاس})\,\text{حتا}^{2}\text{ر}}{\text{س}^{2}}=-\frac{\text{جار}}{\text{ل}}\,\text{فاس}+\frac{\text{جتار}}{\text{ل}}\,\text{فاص}$$

ومن هاتين المعادلتين يستخرج $\frac{\text{فال}}{\text{فاس}}$, $\frac{\text{فال}}{\text{فاص}}$, $\frac{\text{فار}}{\text{فاس}}$, $\frac{\text{فار}}{\text{فاص}}$ وينتج من ذلك ان

$$\left.\begin{aligned}\frac{\text{فاح}}{\text{فاس}}&=\frac{\text{فاح}}{\text{فال}}\,\text{جتار}-\frac{\text{فاح}}{\text{فار}}\,\frac{\text{جار}}{\text{ل}} \quad ,\\ \frac{\text{فاح}}{\text{فاص}}&=\frac{\text{فاح}}{\text{فال}}\,\text{جار}+\frac{\text{فاح}}{\text{فار}}\,\frac{\text{جتار}}{\text{ل}}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

وباضافة معادلتى (٢) الى بعضهما بعد ضرب الثانية فى $\sqrt{-1}$ المرموز له بالرمز ء يحدث

$$\frac{\text{فاق}}{\text{فاس}}+\text{ء}\frac{\text{فاق}}{\text{فاص}}=(\text{جتار}+\text{ء جار})\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فال}}+\frac{\text{ء}}{\text{ل}}\frac{\text{فاق}}{\text{فار}}\right)\qquad(٣)$$

ولنرمز بحرف ح لمقدار كل من طرفى القانون (٣) فحيث ان هذا القانون يحصل مهما كانت الدالة ق ومهما كانت الاشارة التى تعطى للجذر ء فيمكن تعويض ق بالمقدار ح والكمية ء بالكمية ـ ء وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فاح}}{\text{فاس}}-\text{ء}\frac{\text{فاح}}{\text{فاص}}=(\text{جتار}-\text{ء جار})\left(\frac{\text{فاح}}{\text{فال}}-\frac{\text{ء}}{\text{ل}}\frac{\text{فاح}}{\text{فار}}\right)\qquad(٤)$$

ومن المتساوية

$$\text{ح}=\frac{\text{فاق}}{\text{فاس}}+\text{ء}\frac{\text{فاق}}{\text{فاص}}$$

ينتج أن

$$\frac{\text{فاح}}{\text{فاس}}-\text{ء}\frac{\text{فاح}}{\text{فاص}}=\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاس}^{٢}}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاص}^{٢}}$$

ومن المتساوية

$$\text{ح}=(\text{جتار}+\text{ء جار})\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فال}}+\frac{\text{ء}}{\text{ل}}\frac{\text{فاق}}{\text{فار}}\right)$$

يتحصل

$$(\text{جتار}-\text{ء جار})\left(\frac{\text{فاح}}{\text{فال}}-\frac{\text{ء}}{\text{ل}}\frac{\text{فاح}}{\text{فار}}\right)=\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فال}^{٢}}+\frac{١}{\text{ل}^{٢}}\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فار}^{٢}}+\frac{١}{\text{ل}}\frac{\text{فاق}}{\text{فال}}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاس}^{٢}}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاص}^{٢}}=\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فال}^{٢}}+\frac{١}{\text{ل}^{٢}}\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فار}^{٢}}+\frac{١}{\text{ل}}\frac{\text{فاق}}{\text{فال}}\qquad(٥)$$

واذن يكون

$$\text{م}=\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاع}^{٢}}+\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فال}^{٢}}+\frac{١}{\text{ل}^{٢}}\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فار}^{٢}}+\frac{١}{\text{ل}}\frac{\text{فاق}}{\text{فال}}\qquad(٦)$$

ولاجل

ولاجل تتميم الحل يعوّض المتغيران ل و ع بالمتغيرين الجديدين ه و و المرتبطين بالمتغيرين المذكورين بالمعادلتين

$$\text{ع} = \text{ه}\,\text{جتا}\,\text{و} \quad , \quad \text{ل} = \text{ه}\,\text{جا}\,\text{و}$$

فاذا عوّض س و ص و ل و ر فى القانون (٥) بالمتغيرات ع و ل و ه و و على التناظر يحدث

$$\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاع}^{٢}} + \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فال}^{٢}} = \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاه}^{٢}} + \frac{١}{\text{ه}^{٢}}\,\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاو}^{٢}} + \frac{١}{\text{ه}}\,\frac{\text{فاق}}{\text{فاه}}$$

واذا اجرى نفس هذا التغيير فى القانونين (٢) يحدث

$$\frac{\text{فاق}}{\text{فال}} = \frac{\text{فاق}}{\text{فاه}}\,\text{جاو} + \frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\,\frac{\text{جتاو}}{\text{ه}}$$

وحينئذ اذا وضع هذان المقداران فى القانون (٦) وعوّض ايضا ل بما يساويه وهو ه جاو يحدث

$$\text{ر} = \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاه}^{٢}} + \frac{٢}{\text{ه}}\,\frac{\text{فاق}}{\text{فاه}} + \frac{١}{\text{ه}^{٢}\text{جا}^{٢}\text{و}}\,\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فار}^{٢}} + \frac{١}{\text{ه}^{٢}}\,\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاو}^{٢}} + \frac{\text{جتاو}}{\text{ه}^{٢}\text{جاو}}\,\frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}$$

واذا ضرب الحدان الاولان من هذا المقدار فى ه تحدث المشتقة $\frac{\text{فا}^{٢}(\text{هق})}{\text{فاه}^{٢}}$ واذا ضرب الحدان الاخيران فى ه٢جاو توجد المشتقة

$$\frac{\text{فا}\left(\text{جاو}\,\frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\right)}{\text{فاو}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{ه}^{٢}\text{ر} = \text{ه}\,\frac{\text{فا}^{٢}(\text{هق})}{\text{فاه}^{٢}} + \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{و}}\,\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فار}^{٢}} + \frac{١}{\text{جاو}}\,\frac{\text{فا}\left(\text{جاو}\,\frac{\text{فاق}}{\text{فاو}}\right)}{\text{فاو}}$$

وغالبا يكون الانسب جعل

$$\text{جتاو} = \text{ف}$$

متغيرا بدلا عن و واذذاك يكون

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاو}}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاف}}\ \frac{\text{فاف}}{\text{فاو}}=-\text{جاو}\ \frac{\text{فاى}}{\text{فاف}}$$

ومن هنا يكون

$$\text{جاو}\frac{\text{فاى}}{\text{فاو}}=-(\text{١}-\text{ف}^{٢})\ \frac{\text{فاى}}{\text{فاف}}$$

ويكون

$$\frac{\text{فا}\left(\text{جاو}\frac{\text{فاى}}{\text{فاو}}\right)}{\text{فاو}}=-\frac{\text{فا}\left(\text{جاو}\frac{\text{فاى}}{\text{فاو}}\right)}{\text{فاف}}\text{جاو}=\text{جاو}\frac{\text{فا}\left(\text{١}-\text{ف}^{٢}\right)\frac{\text{فاى}}{\text{فاف}}}{\text{فاف}}$$

ويتحصل أخيرا على مقدار ر بدلالة المتغيرات الغير المتعلقة وهى ه , ف , ر بواسطة القانون

$$\text{ه}^{٢}\text{ر}=\text{ه}\frac{\text{فا}^{٢}(\text{ه ى})}{\text{فاه}^{٢}}+\frac{\text{١}}{\text{١}-\text{ف}^{٢}}\frac{\text{فا}^{٢}\text{ى}}{\text{فار}^{٢}}+\frac{\text{فا}(\text{١}-\text{ف}^{٢})\frac{\text{فاى}}{\text{فاف}}}{\text{فاف}}$$

(فى تغيير جميع المتغيرات)

بند ٩٩ اذا أريد تغيير المتغير الاصلى والمتغيرات الغير المتعلقة فان الطريقة اللازم اتباعها هى عين المتقدمة فلنفرض انه أدخل فى حساب مّا متغير ى وان هذا المتغير دالة لمتغيرات غير متعلقة عددها م ولتكن س , ص , ع , ... ويراد أن تكون كمية أخرى ط دالة لمتغيرات جديدة عددها م ولتكن ے , ك , ل , ... فحينئذ يلزم ايجاد مقادير المشتقات الجزئية

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاس}}\ ,\ \frac{\text{فاى}}{\text{فاص}}\ ,\ \dots ,\ \frac{\text{فا}^{٢}\text{ى}}{\text{فاس}^{٢}}\ ,\ \frac{\text{فا}^{٢}\text{ى}}{\text{فاس فاص}}\ ,\ \dots$$

بدلالة المشتقات الجزئية

$$\frac{\text{فاط}}{\text{فاے}}\ ,\ \frac{\text{فاط}}{\text{فاك}}\ ,\ \dots ,\ \frac{\text{فا}^{٢}\text{ط}}{\text{فاے}^{٢}}\ ,\ \frac{\text{فا}^{٢}\text{ط}}{\text{فاے فاك}}\ ,\ \dots$$

وفى هذه المسئلة تكون المتغيرات التى عددها م+١ لاحدى الجملتين معلومة بدلالة المتغيرات التى عددها م+١ للجملة الاخرى وعلى هذا تكون ط , ے , ك , ل , ... دوال

دوال معلومة للمتغيرات ف و س و ص و ع و ... وتكون تفاضلاتها الكلية بالصورة

$$\text{فاط}=\text{ق}\,\text{فاف}+\text{ق}_{1}\,\text{فاس}+\text{ق}_{2}\,\text{فاص}+\cdots \quad \text{و}$$

$$\text{فاے}=\text{س}\,\text{فاف}+\text{س}_{1}\,\text{فاس}+\text{س}_{2}\,\text{فاص}+\cdots \quad \text{و}$$

$$\text{فاك}=\text{ص}\,\text{فاف}+\text{ص}_{1}\,\text{فاس}+\text{ص}_{2}\,\text{فاص}+\cdots \quad \text{و}$$

. . . .

(ق و ق$_{1}$ و ... و س و س$_{1}$ و ... دوال معلومة للمتغيرات ف و س و ص و ع و ...) لكن حيث ان ف دالة للمتغيرات س و ص و ع و ... فيكون

$$\text{فاف}=\frac{\text{فاف}}{\text{فاس}}\,\text{فاس}+\frac{\text{فاف}}{\text{فاص}}\,\text{فاص}+\cdots$$

وبناء على ذلك يكون

$$(1)\left\{\begin{array}{l}
\text{فاط}=\left(\text{ق}_{1}+\text{ق}\frac{\text{فاف}}{\text{فاس}}\right)\text{فاس}+\left(\text{ق}_{2}+\text{ق}\frac{\text{فاف}}{\text{فاص}}\right)\text{فاص}+\cdots \quad \text{و}\\
\text{فاے}=\left(\text{س}_{1}+\text{س}\frac{\text{فاف}}{\text{فاس}}\right)\text{فاس}+\left(\text{س}_{2}+\text{س}\frac{\text{فاف}}{\text{فاص}}\right)\text{فاص}+\cdots \quad \text{و}\\
\text{فاك}=\left(\text{ص}_{1}+\text{ص}\frac{\text{فاف}}{\text{فاس}}\right)\text{فاس}+\left(\text{ص}_{2}+\text{ص}\frac{\text{فاف}}{\text{فاص}}\right)\text{فاص}+\cdots \quad \text{و}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

فاذا وضعنا الآن هذه المقادير فى القانون

$$\text{فاط}=\frac{\text{فاط}}{\text{فاے}}\,\text{فاے}+\frac{\text{فاط}}{\text{فاك}}\,\text{فاك}+\frac{\text{فاط}}{\text{فال}}\,\text{فال}+\cdots \qquad (2)$$

تحصل معادلة يجب أن تكون حاصلة الوقوع مهما كانت الكميات فاس و فاص و فاع و ... وتنحل هذه المعادلات الى معادلات أخرى عددها م وهى

$$(3)\left\{\begin{array}{l}
\text{ق}_{1}+\text{ق}\frac{\text{فاف}}{\text{فاس}}=\left(\text{س}_{1}+\text{س}\frac{\text{فاف}}{\text{فاس}}\right)\frac{\text{فاط}}{\text{فاے}}+\left(\text{ص}_{1}+\text{ص}\frac{\text{فاف}}{\text{فاس}}\right)\frac{\text{فاط}}{\text{فاك}}+\cdots \quad \text{و}\\
\text{ق}_{2}+\text{ق}\frac{\text{فاف}}{\text{فاص}}=\left(\text{س}_{2}+\text{س}\frac{\text{فاف}}{\text{فاص}}\right)\frac{\text{فاط}}{\text{فاے}}+\left(\text{ص}_{2}+\text{ص}\frac{\text{فاف}}{\text{فاص}}\right)\frac{\text{فاط}}{\text{فاك}}+\cdots \quad \text{و}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

ويمكن تعيين ق , ق , ... , س , ... بدلالة المتغيرات ط , ى , ك , ك , ...

ويحصل بقوانين (٣) على المقادير المطلوبة للمشتقات $\frac{\text{فاق}}{\text{فاس}}$, $\frac{\text{فاق}}{\text{فاص}}$, ...

ولاجل تعيين المشتقات التي برتبة ثانية يكفي أخذ تفاضل المعادلات (٣) مثلا لنعتبر المعادلة الاولى من الجملة (٣) ولنأخذ تفاضلها الكلي ثم نعوض ما $\frac{\text{فاق}}{\text{فاس}}$ بمقدارها وهو

$$\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس}^2}\text{فاس}+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس فاص}}\text{فاص}+\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس فاع}}\text{فاع}+\cdots$$

ثم نعوض فاط , $\text{فا}\frac{\text{فاط}}{\text{فاى}}$, $\text{فا}\frac{\text{فاط}}{\text{فاك}}$, ...

بمقاديرها المتناظرة وهي

$$\frac{\text{فاط}}{\text{فاى}}\text{فاى}+\frac{\text{فاط}}{\text{فاك}}\text{فاك}+\cdots\quad ,$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ط}}{\text{فاى}^2}\text{فاى}+\frac{\text{فا}^2\text{ط}}{\text{فاى فاك}}\text{فاك}+\cdots\quad ,$$

$$\frac{\text{فا}^2\text{ط}}{\text{فاى فاك}}\text{فاى}+\frac{\text{فا}^2\text{ط}}{\text{فاك}^2}\text{فاك}+\cdots\quad ,$$

. . . .

ثم نعوض فاى , فاك , ... بالمقادير المستخرجة من القوانين (١) فتكون المعادلة المتحصلة بهذه الكيفية حاصلة الوقوع مهما كانت التفاضلات الباقية فاس , فاص , فاع , ... وبناء على ذلك تنحل الى معادلات أخرى عددها م بها نعلم مقادير المشتقات الجزئية التي عددها م وهي

$$\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس}^2}\ ,\ \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس فاص}}\ ,\ \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاس فاع}}\ ,\ \ldots$$

وبهذه الكيفية تستنتج مقادير المشتقات الاخرى التي برتبة ثانية وهي

$$\frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاص}^2}\ ,\ \frac{\text{فا}^2\text{ق}}{\text{فاص فاع}}\ ,\ \ldots$$

ومن

ومن الواضح ان المشتقات ذات الرتب التالية تحصل باتباع هذه الطريقة ثم انه يسهل التحقيق من انه يمكن تطبيق الطريقة المتقدمة فى الحالة التى تعتبر فيها متغيرات متعلقة عددها حيثما اتفق مهما كان عدد المتغيرات الغير المتعلقة

(فى تحويل لوجاندر)

بين ... قد استعمل لوجاندر فى بعض مسائل تحويلا مفيدا غالبا نبينه هنا مقتصرين على الحالة التى يعتبر فيها متغيران غير متعلقين فنقول

لتكن ع دالة للمتغيرين الغير المتعلقين سه , صه ولنفرض ان تفاضل ع هو

$$\text{فاع} = \text{ح فاسه} + \text{ك فاصه} \qquad (١)$$

وان تفاضلى ح , ك هما

$$\left.\begin{array}{l} \text{فاح} = \text{ه فاسه} + \text{ر فاصه} \quad , \\ \text{فاك} = \text{ر فاسه} + \text{ر فاصه} \end{array}\right\} \qquad (٢)$$

فاذا وضعنا

$$\text{ى} = \text{ح سه} + \text{ك صه} - \text{ع} \qquad (٣)$$

يكون

$$\text{فاى} = (\text{ح فاسه} + \text{ك فاصه} - \text{فاع}) + \text{سه فاح} + \text{صه فاك}$$

أو (بملاحظة القانون (١))

$$\text{فاى} = \text{سه فاح} + \text{صه فاك} \qquad (٤)$$

وغير ذلك اذا حلت القوانين (٢) بالنسبة الى فاسه , فاصه يحدث

$$\left.\begin{array}{l} \text{فاسه} = \dfrac{\text{ر}}{\text{هر} - \text{ر}^{٢}}\,\text{فاح} + \dfrac{-\text{ر}}{\text{هر} - \text{ر}^{٢}}\,\text{فاك} \quad , \\ \text{فاصه} = \dfrac{-\text{ر}}{\text{هر} - \text{ر}^{٢}}\,\text{فاح} + \dfrac{\text{ه}}{\text{هر} - \text{ر}^{٢}}\,\text{فاك} \end{array}\right\} \qquad (٥)$$

وينحصر تحويل لوجاندر فى جعل ح , ك , ى متغيرات بدلا عن سه , صه , ع وجعل ح , ك متغيرين غير متعلقين وحينئذ يتبين من القانون (٤) ان سه , صه هما المشتقتان الجزئيتان للمتغير ى بالنسبة الى ح , ك على التناظر وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاح}} = \text{سه} \quad , \quad \frac{\text{فاى}}{\text{فاك}} = \text{صه} \qquad (٦)$$

ثم انه يتبين من القوانين (٥) ان $\frac{\text{ر}}{\text{ھر}-\text{س}^{٢}}$ و $\frac{-\text{س}}{\text{ھر}-\text{س}^{٢}}$ و $\frac{\text{ھ}}{\text{ھر}-\text{س}^{٢}}$ هى مقادير المشتقات الجزئية وهى

$$\frac{\text{فاسه}}{\text{فاح}} \quad ، \quad \frac{\text{فاسه}}{\text{فاك}} \quad ، \quad \frac{\text{فاصه}}{\text{فاح}} \quad ، \quad \frac{\text{فاصه}}{\text{فاك}}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاح}^{٢}}=\frac{\text{ر}}{\text{ھر}-\text{س}^{٢}} \quad ، \quad \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاح فاك}}=\frac{-\text{ر}}{\text{ھر}-\text{س}^{٢}} \quad ، \quad \frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاك}^{٢}}=\frac{\text{ھ}}{\text{ھر}-\text{س}^{٢}} \qquad (٧)$$

ومن هنا ينتج أن

$$\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاح}^{٢}}\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاك}^{٢}}-\left(\frac{\text{فا}^{٢}\text{ق}}{\text{فاح فاك}}\right)^{٢}=\frac{١}{\text{ھر}-\text{س}^{٢}} \qquad (٨)$$

فبقوانين (٧) و (٨) تعلم ھ و س و ر بدلالة مشتقات ق بالنسبة الى ح و ك

بند ١٠ فاذا أريد جعل سه و ح متغيرين غير متعلقين يكون التفاضلان الكليان للمتغيرين صه و ك المستخرجان من القوانين (٢) هما

$$\text{فاصه}=\frac{١}{\text{س}}\text{فاح}-\frac{\text{ھ}}{\text{س}}\text{فاسه} \qquad و$$

$$\text{فاك}=\frac{\text{ر}}{\text{س}}\text{فاح}-\frac{\text{ھر}-\text{س}^{٢}}{\text{س}}\text{فاسه}$$

ثم انه بقوانين (١) و (٤) يعلم التفاضلان الكليان فاع و فاں وبواسطة القانون الثانى من القانونين المتقدمين يوجد أن

$$\frac{\text{فاك}}{\text{فاسه}}=-\frac{\text{ھر}-\text{س}^{٢}}{\text{س}} .$$

بفرض ح و سه متغيرين غير متعلقين وحينئذ اذا كان الفرق ھر−س² معدوما على الدوام يكون

$$\frac{\text{فاك}}{\text{فاسه}}=٠$$

ومن

ومن هذا يتضح ان ك لاتتعلق بالمتغير س وحينئذ تكون هذه الكمية دالة للتغير الواحد ح وفى هذه الحالة لايمكن جعل الكميتين ح ، ك متغيرين غير متعلقين ولايمكن استعمال قوانين لوجاندر

(الباب الثانى)

فى التطبيقات التحليلية لحساب التفاضل

(الفصل الاول)

فى متسلسلتى تيلور ومكلوران

فى متسلسلة تيلور

بند متسلسلة تيلور التى اعتبرت زمنا طويلا أساسا لحساب التفاضل تنحصر فى تحليل دالة مثل $\text{د}(\text{س}+\text{ح})$ الى تتابع من الحدود المرتبة على حسب القوى الصحيحة الموجبة التصاعدية للزيادة ح التى تعطى للمتغير س
ولنتصدى لايجاد هذه المتسلسلة فنقول
لتكن ج و ج_1 و ج_2 و ... معاملات القوى المختلفة للزيادة ح فيكون

$$\text{د}(\text{س}+\text{ح}) = \text{ج} + \text{ج}_1\text{ح} + \text{ج}_2\text{ح}^2 + \text{ج}_3\text{ح}^3 + \cdots + \text{ج}_{\text{ه}}\text{ح}^{\text{ه}} + \cdots \qquad (\text{ب})$$

وطريقة ايجاد هذه المعاملات التى هى دوال للمتغير س مؤسسة على هذه النظرية وهى
بند ١٠٣ اذا فرض أن د دالة للمجموع $\text{س}+\text{ح}$ الذى هو مجموع متغيرين غير متعلقين س و ح ورمزنا لهذا المجموع بحرف ى توجد المعادلة

$$\text{د}(\text{س}+\text{ح}) = \text{د}(\text{ى})$$

فاذا اخذنا مشتقة الدالة د بالنسبة الى س تكون هذه المشتقة هى

$$\frac{\text{فاد}}{\text{فاى}} \times \frac{\text{فاى}}{\text{فاس}}$$

واذا

واذا اخذنا مشتقة الدالة المذكورة بالنسبة الى ح يوجد أن هذه المشتقة هى

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاع}} \times \frac{\text{فاع}}{\text{فاح}}$$

لكن من المساواة $\text{سـ}+\text{ح}=\text{ع}$ يوجد أن

$$\frac{\text{فاع}}{\text{فاسـ}}=1 \quad \text{و} \quad \frac{\text{فاع}}{\text{فاح}}=1$$

وحيث كانت هاتان المشتقتان مساويتين للواحد فينتج من ذلك أن

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاسـ}}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاح}}$$

ومن هنا تنتج هذه النظرية وهى

اذا كانت دالة مثل ى دالة لمجموع متغيرين غير متعلقين وليكونا سـ و ح تكون المشتقتان الجزئيتان لهذه الدالة بالنسبة لكل من المتغيرين متساويتين

وبالعكس اذا حدثت المتطابقة

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاسـ}}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاح}}$$

تكون الدالة ى دالة لمجموع $\text{سـ}+\text{ح}$ الذى هو مجموع المتغيرين الغير المتعلقين لانه على الدوام يكون

$$\text{فاى}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاسـ}}\,\text{فاسـ}+\frac{\text{فاى}}{\text{فاح}}\,\text{فاح}$$

وحينئذ اذا كان $\frac{\text{فاى}}{\text{فاسـ}}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاح}}$ يكون

$$\text{فاى}=\frac{\text{فاى}}{\text{فاسـ}}(\text{فاسـ}+\text{فاح})=\frac{\text{فاى}}{\text{فاسـ}}\left[\text{فا}(\text{سـ}+\text{ح})\right]$$

وبالتأمل يرى ان المشتقة $\frac{\text{فاى}}{\text{فاسـ}}$ لا تكون معدومة على الدوام لانها لو كانت معدومة على الدوام تكون المشتقة $\frac{\text{فاى}}{\text{فاح}}$ معدومة على الدوام أيضا وتصير الدالة ى كمية ثابتة وحينئذ لاجل أن يكون $\text{فاى}=0$ يلزم ويكفى ان يكون $\text{فا}(\text{سـ}+\text{ح})=0$ أى

ان ى و س+ح يكونان فى آن واحد كميتين ثابتتين بمعنى ان ى تكون دالة للمجموع س+ح

بند ١٠٤ مثالان — الاول لتكن الدالة

$$\text{ى} = \text{جاس جتاح} + \text{جاح جتاس}$$

ولنأخذ المشتقة بالنسبة للتغير س فنجد أن

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاس}} = \text{جتاس جتاح} - \text{جاس جاح}$$

واذا أخذنا المشتقة بالنسبة للتغير ح نجد أن

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاح}} = -\text{جاس جاح} + \text{جتاس جتاح}$$

وحيث ان هاتين المشتقتين متساويتان فتكون الدالة ى دالة للمجموع س+ح ولاجل تعيين تلك الدالة نجعل ح = ٠ فنجد أن

$$\text{ى}(\text{س}) = \text{جاس}$$

ولاجل تحصيل ى(س+ح) يكفى تعويض س فى ى(س) بالمجموع س+ح وحينئذ تكون

$$\text{ى} = \text{جا}(\text{س}+\text{ح})$$

الثانى لتكن

$$\text{ى}(\text{س و ح}) = \frac{\text{ظاس}+\text{ظاح}}{١-\text{ظاس ظاح}}$$

دالة متماثلة للتغيرين س و ح

فبأخذ المشتقة بالنسبة الى س يحدث

$$\frac{\text{فاى}}{\text{فاس}} = \frac{(١-\text{ظاس ظاح})\frac{١}{\text{حتا}^{٢}\text{س}} + (\text{ظاس}+\text{ظاح})\frac{١}{\text{حتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ظاح}}{(١-\text{ظاس ظاح})^{٢}}$$

$$= \frac{١+\text{ظا}^{٢}\text{ح}}{\text{حتا}^{٢}\text{س}\,(١-\text{ظاس ظاح})^{٢}} = \frac{١}{\text{حتا}^{٢}\text{س}\,\text{حتا}^{٢}\text{ح}\,(١-\text{ظاس ظاح})^{٢}}$$

وحيث كانت هذه الدالة متماثلة كذلك بالنسبة للتغيرين ح و س فبأخذ المشتقة بالنسبة

بالنسبة الى ح يوجدان $\frac{\text{فاء}}{\text{فاح}}=\frac{\text{فاء}}{\text{فاس}}$ وحينئذ تكون الدالة ء دالة للمجموع س+ح وحقيقة هي ظل المجموع س+ح الذي هو مجموع المتغيرين س و ح بمـا د وهذه هي النظرية التي نتخذها أساسا لاجل ايجاد قانون تحليل ء(س+ح) ولاجل تحصيله نأخذ المعادلة التي كتبناها سابقا وهي

$$\text{ء}(\text{س}+\text{ح})=\text{ج}+\text{ج}_1\text{ح}+\text{ج}_2\text{ح}^2+\text{ج}_3\text{ح}^3+\cdots \qquad (\text{ب})$$

ونكون مشتقي الدالة ء بالنسبة الى س والى ح فنجد أن

$$\frac{\text{فاء}}{\text{فاح}}=\text{ج}_1+2\text{ج}_2\text{ح}+3\text{ج}_3\text{ح}^2+\cdots+\text{ه}\,\text{ج}_\text{ه}\,\text{ح}^{\text{ه}-1}+\cdots \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{فاء}}{\text{فاس}}=\frac{\text{فاج}}{\text{فاس}}+\frac{\text{فاج}_1}{\text{فاس}}\text{ح}+\frac{\text{فاج}_2}{\text{فاس}}\text{ح}^2+\cdots+\frac{\text{فاج}_{\text{ه}-1}}{\text{فاس}}\text{ح}^{\text{ه}-1}+\cdots$$

وبموجب النظرية المتقدمة تكون هاتان المشتقتان متساويتين مهما كان س و ح وحينئذ اذا ساوينا معاملات القوى المختلفة للمتغير ح ببعضها نجد أن

$$\text{ج}_1=\frac{\text{فاج}}{\text{فاس}} \quad ،$$

$$\text{ج}_2=\frac{1}{2}\,\frac{\text{فاج}_1}{\text{فاس}}=\frac{1}{1\times2}\,\frac{\text{فا}^2\text{ج}}{\text{فاس}^2} \quad ،$$

$$\text{ج}_3=\frac{1}{3}\,\frac{\text{فاج}_2}{\text{فاس}}=\frac{1}{1\times2\times3}\,\frac{\text{فا}^3\text{ج}}{\text{فاس}^3} \quad ،$$

. . . .

$$\text{ج}_\text{ه}=\frac{1}{\text{ه}}\,\frac{\text{فاج}_{\text{ه}-1}}{\text{فاس}}=\frac{1}{1\times2\times3\cdots\times\text{ه}}\,\frac{\text{فا}^\text{ه}\text{ج}}{\text{فاس}^\text{ه}}$$

فاذا عوضنا المعاملات المختلفة الداخلة في متسلسلة (ب) بالابتداء من المعامل ج_1 بمقاديرها بدلالة ج يحدث

$$د(س+ح) = د + \frac{ح}{١} \frac{فاد}{فاس} + \frac{ح^٢}{١×٢} \frac{فا^٢د}{فاس^٢} + \frac{ح^٣}{١×٢×٣} \frac{فا^٣د}{فاس^٣} + \cdots$$

$$+ \frac{ح^ه}{١×٢\cdots×ه} \frac{فا^هد}{فاس^ه} + \cdots$$

ولم يبق علينا الا تعيين مقدار د ولذلك نفرض ان ح=٠ . فيكون

$$د = د(س)$$

وحينئذ يكون

$$د(س+ح) = د(س) + ح دَ(س) + \frac{ح^٢}{١×٢} دً(س) + \cdots$$

$$+ \frac{ح^ه}{١×٢\cdots×ه} د^{(ه)}(س) + \cdots$$

وهذه هي متسلسلة تيلور التي بها يحصل على تحليل د(س+ح) وحيث كان عدد الحدود لانهائيا (مالم تكن د(س) صحيحة) فمن الواضح ان هذه المتسلسلة لا يمكن ان تدل على الدالة المفروضة الا اذا كانت تقاربية

ومتى حلت أى دالة بهذه الكيفية ووقف التحليل بالحد الذى رتبته ه لزم لاجل تحصيل المقدار الحقيقى للتحليل ان يضاف لمجموع هذه الحدود التى عددها ه كمية تسمى باقيا أو حدا مكملا ولنتصدى للبحث عن هذه الكمية فنقول

فى مقدار الحد المكمل

بند ١٠٦ الطريقة التى نسلكها لاجل البحث عن مقدار الحد المكمل مؤسسة على هذه النظرية وهى

اذا فرضنا ان د١(ع) دالة للمتغير ع وان هذه الدالة تبقى مستمرة هى ومشتقتها دَ١(ع) بالابتداء من المقدار ع=ك الى المقدار ع=ل وفرضنا ان د١(ك)=د١(ل)

أقول انه يجب ان تنعدم المشتقة دَ١(ع) بمقدار محصور بين ك و ل

لان الدالة المستمرة د١(ع) لا يمكن ان تأخذ مقدارين متساويين مطابقين للمقدارين

ع=ك , ع=ل الا اذا كانت فيما بين هذين المقدارين متزايدة ومتناقصة بالتعاقب ولهذا يقتضى ان تتغير اشارة مشتقتها بمقدار محصور بين المقدارين ع=ك و ع=ل وحيث انها مستمرة فيجب ان تمر بالصفر وهو ما أردنا بيانه

بند ١٠٧ ولاجل البحث عن الحد المكمل نضع

$$\text{د}(\text{س}+\text{ح})=\text{د}(\text{س})+\text{ح}\,\text{د}'(\text{س})+\frac{\text{ح}^{2}}{1\times2}\text{د}''(\text{س})+\cdots$$

$$+\frac{\text{ح}^{\text{ه}-1}}{1\times2\cdots(\text{ه}-1)}\text{د}^{(\text{ه}-1)}(\text{س})+\text{ر}_{\text{ه}} \qquad (\text{ت})$$

ونفرض ان الدالة د(س) ومشتقاتها المتتالية الى المشتقة برتبة ه مستمرة بالنسبة الى س بالابتداء من المقدار س الى المقدار س+ح ثم نجعل

$$\text{ر}_{\text{ه}}=\text{ح}^{\text{ع}}\,\text{ج}_{1}$$

وحرف ع ثابت أقل مقداره ١ وأكبر مقداره ه ونبحث عن المقدار الذى يلزم اعطاؤه للكمية ج_{1} ولذلك نفرض ان ع متغير يمكن ان يأخذ مقادير تختلف من ٠ الى ح ونضع

$$\text{د}_{1}(\text{ع})=\text{د}(\text{س}+\text{ع})+(\text{ح}-\text{ع})\text{د}'(\text{س}+\text{ع})+\frac{(\text{ح}-\text{ع})^{2}}{1\times2}\text{د}''(\text{س}+\text{ع})+\cdots$$

$$+\frac{(\text{ح}-\text{ع})^{\text{ه}-1}}{1\times2\cdots(\text{ه}-1)}\text{د}^{\text{ه}-1}(\text{س}+\text{ع})+(\text{ح}-\text{ع})^{\text{ع}}\text{ج}_{1}$$

فمتى كان ع=٠ تؤل $\text{د}_{1}(\text{ع})$ بموجب المعادلة (ت) الى د(س+ح) ومتى كان ع=ح تصير $\text{د}_{1}(\text{ع})$ مساوية أيضا الى د(س+ح) وغير ذلك فانه ينتج بداهة من الشروط المفروضة ان $\text{د}_{1}(\text{ع})$ ومشتقتها $\text{د}'_{1}(\text{ع})$ تتغيران بكيفية مستمرة بمقادير ع بالابتداء من ع=٠ الى ع+ح وبناء على ما تقرر فى بند ١٠٦ تنعدم المشتقة $\text{د}'_{1}(\text{ع})$ بمقدار للمتغير ع محصور بين ٠ , ح وهذا المقدار وان كان مجهولا الا انه يمكن الدلالة عليه بالكمية ےح (حرف ے رمز لكمية محصورة بين الصفر والواحد) وحينئذ يكون

$$\text{د}'_{1}(\text{ےح})=0$$

لكن لو أخذنا مشتقة $\text{د}_{1}(\text{ع})$ وحذفنا الحدود التى يمحو بعضها بعضا يوجد أن

$$\text{ءَ}_{1}(\text{ع})=\frac{(\text{ح}-\text{ع})^{\text{ه}-1}}{1\times2\cdots(\text{ه}-1)}\,\text{ء}^{\text{ه}}(\text{س}+\text{ع})-\text{ج}(\text{ح}-\text{ع})^{\text{ج}-1}\,\text{ج}_{1}$$

$$=(\text{ح}-\text{ع})^{\text{ج}-1}\left[\frac{(\text{ح}-\text{ع})^{\text{ه}-\text{ج}}}{1\times2\cdots(\text{ه}-1)}\,\text{ء}^{\text{ه}}(\text{س}+\text{ع})-\text{ج}\,\text{ج}_{1}\right]$$

وحيث ان العامل $(\text{ح}-\text{ع})^{\text{ج}-1}$ لايمكن ان ينعدم باى مقدار للمتغير ع محصور بين ٠ , ح فنسوى العامل الثانى بالصفر بعد ان نعوض فيه ع بالكمية ےح فيحدث

$$\text{ج}_{1}=\frac{(1-\text{ے})^{\text{ه}-\text{ج}}\,\text{ح}^{\text{ه}}}{1\times2\cdots(\text{ه}-1)\,\text{ج}}\,\text{ء}^{\text{ه}}(\text{س}+\text{ے}\text{ح})$$

وحينئذ يكون مقدار $\text{ر}_{\text{ه}}$ هو

$$\text{ر}_{\text{ه}}=\frac{(1-\text{ے})^{\text{ه}-\text{ج}}\,\text{ح}^{\text{ه}}}{1\times2\cdots(\text{ه}-1)\,\text{ج}}\,\text{ء}^{\text{ه}}(\text{س}+\text{ے}\text{ح})$$

فاذا تصورنا الآن اننا زدنا ه الى مالانهاية وفرضنا أن المشتقات لاتزال مستمرة ومال $\text{ر}_{\text{ه}}$ من الصفر فان المجموع

$$\text{ء}(\text{س})+\text{ح}\,\text{ءَ}(\text{س})+\cdots+\frac{\text{ح}^{\text{ه}-1}}{1\times2\cdots(\text{ه}-1)}\,\text{ء}^{\text{ه}-1}(\text{س})$$

يقرب قربا لانهائيا من ء(س+ح) حيث انه لايخالف ء(س+ح) الا بكمية $\text{ر}_{\text{ه}}$ التى تميل الى الصفر بمعنى ان المتسلسلة الغير المحدودة وهى

$$\text{ء}(\text{س})+\text{ح}\,\text{ءَ}(\text{س})+\frac{\text{ح}^{2}}{1\times2}\,\text{ءً}(\text{س})+\cdots\cdots$$

تكون تقاربية ويكون مجموعها هو ء(س+ح) وهذا هو ماتنحصر فيه نظرية تيلور وحيث كان العدد ج اختياريا فيفرض عادة مساويا الى ه ويكون

$$\text{ر}_{\text{ه}}=\frac{\text{ح}^{\text{ه}}}{1\times2\times3\cdots\text{ه}}\,\text{ء}^{\text{ه}}(\text{س}+\text{ے}\text{ح})$$

ويأخذ قانون تيلور هذه الصورة وهي

$$\text{د}(\text{س}+\text{ح})=\text{د}(\text{س})+\text{ح}\,\text{دَ}(\text{س})+\frac{\text{ح}^{2}}{1\times2}\,\text{دً}(\text{س})+\cdots$$

$$+\frac{\text{ح}^{\text{ن}-1}}{1\times2\cdots(\text{ن}-1)}\,\text{د}^{\text{ن}-1}(\text{س})+\frac{\text{ح}^{\text{ن}}}{1\times2\cdots\text{ن}}\,\text{د}^{\text{ن}}(\text{س}+\text{ك}\,\text{ح})\quad(1)$$

١٠٨ تنبيهات — الاول لا يمكن تحليل $\text{د}(\text{س}+\text{ح})$ الى متسلسلة تقاربية مرتبة على حسب القوى الصحيحة الموجبة التصاعدية للزيادة ح بخلاف متسلسلة تيلور ولاثبات ذلك نفرض انه يمكن تحليل $\text{د}(\text{س}+\text{ح})$ الى متسلسلة أخرى مخالفة لمتسلسلة تيلور ولتكن

$$\text{د}(\text{س}+\text{ح})=\text{ب}+\text{ب}_{1}\text{ح}+\text{ب}_{2}\text{ح}^{2}+\text{ب}_{3}\text{ح}^{3}+\cdots$$

فحيث ان

$$\text{د}(\text{س}+\text{ح})=\text{د}(\text{س})+\text{دَ}(\text{س})\,\text{ح}+\frac{\text{دً}(\text{س})}{1\times2}\,\text{ح}^{2}+\frac{\text{د}'''(\text{س})}{1\times2\times3}\,\text{ح}^{3}+\cdots$$

فيستنتج من ذلك ان

$$\left[\text{ب}-\text{د}(\text{س})\right]+\left[\text{ب}_{1}-\text{دَ}(\text{س})\right]\text{ح}+\left[\text{ب}_{2}-\frac{\text{دً}(\text{س})}{1\times2}\right]\text{ح}^{2}+\cdots=0$$

فاذا جعل $\text{ح}=0$ تؤول هذه المتساوية الاخيرة الى $\text{ب}=\text{د}(\text{س})$ فاذا قسمنا الطرفين على ح ثم جعلنا $\text{ح}=0$ يوجد ان $\text{ب}_{1}=\text{دَ}(\text{س})$ وبمثل ذلك يوجد ان

$$\text{ب}_{2}=\frac{\text{دً}(\text{س})}{1\times2}$$ وهلم جرا

(الثاني) من الضروري لاجل تطبيق متسلسلة تيلور لاجل تحليل دالة معلومة ان يتحقق من ان الحد المكمل $\text{ي}_{\text{ن}}$ يميل الى الصفر متى صار ن لا نهائيا وهناك حالة يكون فيها هذا الشرط مستوفيا وهي التي لا يمكن ان تزيد فيها $\text{د}^{\text{ن}}(\text{س})$ مهما كان العدد ن عن نهاية معلومة باي مقدار يعطى للمتغير س بحيث يكون محصورا بين س و $\text{س}+\text{ح}$ لاننا اذا فرضنا ان ك هو العدد الاكبر من ح بواحد يكون

$$\frac{\text{ح}^{\text{ن}}}{1\times2\cdots\text{ن}}=\frac{\text{ح}^{\text{ك}-1}}{1\times2\cdots(\text{ك}-1)}\times\frac{\text{ح}}{\text{ك}}\cdot\frac{\text{ح}}{\text{ك}+1}\cdots\frac{\text{ح}}{\text{ن}}$$

$$<\frac{\text{ح}^{\text{ك}-1}}{1\times2\cdots(\text{ك}-1)}\cdot\left(\frac{\text{ح}}{\text{ك}}\right)^{\text{ن}-\text{ك}+1}$$

وحيث ان نهاية العامل الاخير صفر وان $\frac{ح}{ك}<١$ فتكون نهاية العامل $\frac{ح^{ن}}{١×٢×\cdots×ن}$ صفرا متى زاد ن الى مالانهاية وحيث ان $د^{ن}(س+ىح)$ لا يمكن ان تزيد عن نهاية معلومة فرضا فيميل الحد المكمل الى الصفر متى زاد ن الى مالانهاية ويمكن استعمال متسلسلة تيلور متى كانت $د(س)$ وجميع مشتقاتها مستمرة ومحدودة بمقادير س المحصورة بين س و س+ح

وحينئذ تنحصر الصعوبة فى معرفة هل يمكن ان تزيد $د^{ن}(س)$ الى مالانهاية متى صار ن لانهائيا أم لا

(الثالث) لا يعلم شئ بخصوص كمية ى خلاف كون هذه الكمية محصورة بين الصفر والواحد ومع ذلك فان قانون الباقى يكفى لاجل معرفة نهايتين للخطأ الذى يقع اذا اخذت حدود من المتسلسلة عددها ن لاننا لو فرضنا ان ع , و هما اصغر واكبر المقادير التى تمر بها الدالة $د^{ن}(س)$ متى مر المتغير من المقدار س الى المقدار س+ح يكون

$$د^{ن}(س+ىح)=م(ع , و)$$

واذن يكون

$$ر_{ن}=م\left(\frac{ح^{ن}}{١×٢×\cdots×ن}ع , \frac{ح^{ن}}{١×٢×\cdots×ن}و\right)$$

(الرابع) اذا جعل ن=١ فى معادلة (١) يتحصل

$$د(س+ح)-د(س)=حدَ(س+ىح)$$

وهذا القانون كثير الاستعمال

(الخامس) قد يصعب بواسطة الصورة المتقدمة للحد المكمل اختبار ان كان هذا الحد يميل الى الصفر أم لا فحينئذ تستعمل الصورة الآتية التى يتحصل عليها بجعل ع=١ فى المقدار العمومى السابق تحصيله وهذه الصورة هى

$$ر_{ن}=\frac{ح^{ن}(١-ى)^{ن-١}}{١×٢×\cdots×(ن-١)}د^{ن}(س+ىح) \qquad (ط)$$

بند ١٠٩ قد يمكن كتابة قانون تيلور بكيفيات مختلفة فاذا رمزنا بحرف ص لدالة ولتكن

د(س) وفرضنا ان ك هي الزيادة التي تزيد بها الدالة متى غير س بالكمية س+ح تأخذ المعادلة (١) هذه الصورة وهي

$$\text{ص}+\text{ك}=\text{ص}+\frac{\text{فاص}}{\text{فاس}}\text{ح}+\frac{\text{فا}^{2}\text{ص}}{\text{فاس}^{2}}\frac{\text{ح}^{2}}{1\times2}+\cdots+\frac{\text{فا}^{\text{هـ}-1}\text{ص}}{\text{فاس}^{\text{هـ}-1}}\frac{\text{ح}^{\text{هـ}-1}}{1\times2\cdots(\text{هـ}-1)}+\frac{\text{ح}^{\text{هـ}}}{1\times2\cdots\text{هـ}}\left(\frac{\text{فا}^{\text{هـ}}\text{ص}}{\text{فاس}^{\text{هـ}}}\right)_{\text{س}+\text{ح}\,\text{ح}} \qquad (٢)$$

في قانون مكوران

اذا جعلنا س=٠ في قانون (١) المتقدم في بند ١٠٧ ثم كتبنا س بدل ح يحدث القانون

$$\text{د}(\text{س})=\text{د}(0)+\text{س}\,\text{د}'(0)+\frac{\text{س}^{2}}{1\times2}\text{د}''(0)+\cdots+\frac{\text{س}^{\text{هـ}-1}}{1\times2\cdots(\text{هـ}-1)}\text{د}^{\text{هـ}-1}(0)+\frac{\text{س}^{\text{هـ}}}{1\times2\cdots\text{هـ}}\text{د}^{\text{هـ}}(\text{ح}\,\text{س}) \qquad (٣)$$

ولينتبه دائما الى ان حرف ح رمز لكمية محصورة بين ٠ و ١

وهذا القانون هو قانون مكوران وبه تحلل د(س) الى تتابع من الحدود المرتبة على حسب القوى التصاعدية للمتغير س الا ان ذلك يكون بهذا الشرط الذي ينتج مما تقدم وهو أولا ان الدالة ومشتقاتها تكون مستمرة بالمقادير التي تعطى للمتغير س بالابتداء من المقدار س=٠ الى المقدار س المعتبر وثانيا ان يميل الباقي

$$\text{ب}_{\text{هـ}}=\frac{\text{س}^{\text{هـ}}}{1\times2\cdots\text{هـ}}\text{د}^{\text{هـ}}(\text{ح}\,\text{س})$$

الى الصفر متى زاد هـ الى ما لانهاية وهذا الباقي يمكن أيضا وضعه بهذه الصورة

$$\text{ب}_{\text{هـ}}=\frac{\text{س}^{\text{هـ}}(1-\text{ح})^{\text{هـ}-1}}{1\times2\cdots(\text{هـ}-1)}\text{د}^{\text{هـ}}(\text{ح}\,\text{س}) \qquad (\text{ل})$$

التي يتحصل عليها بجعل س=٠ وابدال ح بالمتغير س في المقدار (ط) المتقدم في بند ١٠٨

والتنبيهات المختصة بقانون تيلور تطبق بالضرورة على قانون مكلوران أعني مثلا لا يمكن اجراء التحليل الا بكيفية واحدة وهكذا باقي التنبيهات

في تطبيقات قانون مكلوران

بند ١١١ لنأخذ الدالة د(س) = $ح^{س}$ فيكون

$$د^{ن}(س) = ح^{س} (لوح)^{ن}$$

وتكون الدالة وجميع مشتقاتها مستمرة مهما كان س وحينئذ يمكن تطبيق قانون مكلوران ويكون

$$ح^{س} = ١ + س لوح + \frac{س^{٢}}{١×٢} (لوح)^{٢} + \cdots + \frac{س^{ن-١}}{١×٢\cdots(ن-١)} (لوح)^{ن-١}$$
$$+ \frac{س^{ن}}{١×٢\cdots×ن} (لوح)^{ن} ح^{ى س}$$

وقد شوهد في التنبيه الثاني من بند ١٠٨ ان المقدار

$$\frac{(س لوح)^{ن}}{١×٢\cdots×ن}$$

يميل الى الصفر متى صار ن لانهائيا واما العامل $ح^{ى س}$ فان مقداره محدود ومحصور بين ١ , $ح^{س}$ وحينئذ تكون نهاية الباقي صفرا ويكون

$$ح^{س} = ١ + \frac{(س لوح)}{١} + \frac{(س لوح)^{٢}}{١×٢} + \frac{(س لوح)^{٣}}{١×٢×٣} + \cdots$$

مهما كان المقدار الذي يعطى للمتغير س

وفي الحالة الخصوصية التي يكون فيها ح=هـ يكون لوح=١ ويكون

$$هـ^{س} = ١ + س + \frac{س^{٢}}{١×٢} + \frac{س^{٣}}{١×٢×٣} + \cdots$$

بند ١١٢ ولنفرض ان د(س) = حاس فيكون

$$د^{ن}(س) = حا(س + ن \frac{ط}{٢})$$

وحيث

وحيث ان هذه المشتقة مستمرة بكل مقدار يعطى الى ن ومساوية فى الغاية للواحد مهما كان س فيشاهد مباشرة انه يمكن دائما تطبيق متسلسلة مكلوران وبها يكون

$$\text{حاس} = س - \frac{س^{٣}}{١\times٢\times٣} + \frac{س^{٥}}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} - \frac{س^{٧}}{١\times٢\cdots\times٧} + \cdots$$

والباقى بعد الحد المحتوى على $س^{ن-١}$ هو

$$\frac{س^{ن}}{١\times٢\times\cdots\times ن}\,\text{حا}\left(ىس + ن\frac{ط}{٢}\right) = م\left(\pm\frac{س^{ن}}{١\times٢\times\cdots\times ن}\right)$$

وبادلة مشابهة يوجد ان

$$\text{جتاس} = ١ - \frac{س^{٢}}{١\times٢} + \frac{س^{٤}}{١\times٢\times٣\times٤} - \frac{س^{٦}}{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦} + \cdots$$

مهما كان المقدار الذى يعطى للمتغير س

ب ١١٢ د واذا جعلنا $د(س) = \overline{لو}(١+س)$ نجد ان

$$د'(س) = \frac{١}{١+س}\ ,\quad د''(س) = -\frac{١}{(١+س)^{٢}}\ ,\ \cdots$$

$$,\quad د^{ن}(س) = (-١)^{ن-١}\frac{١\times٢\cdots(ن-١)}{(١+س)^{ن}}$$

وجميع هذه المشتقات تكون مستمرة اذا كان $س > -١$ وحينئذ يمكن تطبيق قانون مكلوران ويكون

$$\overline{لو}(١+س) = س - \frac{س^{٢}}{٢} + \frac{س^{٣}}{٣} - \cdots \pm \frac{س^{ن-١}}{ن-١} + ر_{ن}$$

وباستعمال الصورة الثانية للباقى $ر_{ن}$ يكون

$$ر_{ن} = \pm\frac{س^{ن}(١-ى)^{ن-١}}{(١+ىس)^{ن}} = \pm\frac{س}{١+ىس}\times\left(\frac{س-ىس}{١+ىس}\right)^{ن-١}$$

ولاجل ان تكون المتسلسلة تقاربية يقتضى فى أول الامر ان يكون المقدار المطلق لنهاية النسبة

$$\left[-(ن-١)\frac{س}{ن}\right]$$

الواقعة بين الحد الذى رتبته ى والحد السابق له اقل من الواحد ولذا يقتضى ان يكون

$$س = م(-١ ، +١)$$

فاذا كان $س > ٠$ و $ح < ١$ يكون مقدار العامل $\frac{س}{١ + ح س}$ محدودا واقل من س ويكون

$$س > \frac{س + ح س}{١ + ح س} > ٠$$

وحينئذ تكون نهاية

$$\left(\frac{س - ح س}{١ + ح س} \right)^{ى - ١}$$

صفرا متى صار ى لانهائيا ويكون نها $ر_ى = ٠$ اذا كان

$$-١ < س < ٠$$

فاذا جعل $س = -و$ يكون

$$ر_ى = \pm \frac{و}{١ - ح و} \cdot \left(\frac{و - ح و}{١ - ح و} \right)^{ى - ١}$$

فالعامل الاول مقداره محدود واصغر من $\frac{و}{١ - و}$ والعامل الثانى يميل الى الصفر متى مال $\frac{١}{ى}$ الى الصفر اذ ان $\frac{و - ح و}{١ - ح و}$ أقل دائما من و وحينئذ تكون نهاية $ر_ى$ صفرا أيضا

ويعلم من ذلك انه بكل مقدار يعطى للتغير س بحيث يكون محصورا بين -١ و +١ يمكن تحليل الدالة المفروضة الى متسلسلة تقاربية بواسطة قانون مكلوران ويكون

$$لو(١ + س) = س - \frac{س^٢}{٢} + \frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٤}{٤} + \dots$$

فى القوانين المختصة بحساب اللوغاريتمات

بند ١١٣ حساب اللوغاريتمات النيبريانية — متى كانت الكمية س محصورة بين ٠ و ١ يحدث القانونان

$$لو(١ + س) = \frac{س}{١} - \frac{س^٢}{٢} + \frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٤}{٤} + \dots \quad و \qquad (١)$$

لو

$$لوَ(١-سہ)=-\frac{سہ}{١}-\frac{سہ^٢}{٢}-\frac{سہ^٣}{٣}-\frac{سہ^٤}{٤}-\ldots \qquad (٢)$$

اللذان ثانيهما يتحصل من أولهما بتغيير المتغير سہ بالمتغير -سہ فاذا طرح ثانيهما من اولهما يحدث

$$لوَ\frac{١+سہ}{١-سہ}=٢\left(\frac{سہ}{١}+\frac{سہ^٣}{٣}+\frac{سہ^٥}{٥}+\ldots\right) \qquad (٣)$$

ولنجعل $سہ=\frac{ح}{صہ}$ فى القانون (١) فبذلك يكون

$لوَ(١+سہ)=لوَ(صہ+ح)-لوَصہ$ ويكون

$$لوَ(صہ+ح)-لوَصہ=\frac{ح}{صہ}-\frac{ح^٢}{٢صہ^٢}+\frac{ح^٣}{٣صہ^٣}-\ldots \qquad (٤)$$

ثم لنجعل فى القانون (٣)

$سہ=\frac{ح}{٢صہ+ح}$ فيكون $\frac{١+سہ}{١-سہ}=\frac{صہ+ح}{صہ}$

ويحدث

$$\left.\begin{array}{l}لوَ(صہ+ح)-لوَصہ\\ =٢\left[\frac{ح}{(٢صہ+ح)}+\frac{ح^٣}{٣(٢صہ+ح)^٣}+\frac{ح^٥}{٥(٢صہ+ح)^٥}+\ldots\right]\end{array}\right\} \qquad (٥)$$

فالقانونان (٤) و (٥) يمكن استعمالهما لاجل حساب اللوغاريتمات النيبريانية لعدد صہ+ح متى كان لوغاريتم صہ معلوما والمتسلسلتان المنحصرتان فى هذين القانونين تكونان تقاربيتين جدا متى كان صہ عظيما بالنسبة للعدد ح وفى الحالة الخصوصية التى يكون فيها ح=١ يكون

$$لوَ(صہ+١)-لوَصہ=\frac{١}{صہ}-\frac{١}{٢صہ^٢}+\frac{١}{٣صہ^٣}-\ldots \quad و \qquad (٦)$$

$$\left.\begin{array}{l}لوَ(صہ+١)-لوَصہ\\ =٢\left[\frac{١}{٢صہ+١}+\frac{١}{٣(٢صہ+١)^٣}+\frac{١}{٥(٢صہ+١)^٥}+\ldots\right]\end{array}\right\} \qquad (٧)$$

بند ١٤٤ مقياس اللوغاريتمات المعتادة — من المعلوم ان

$$ه^{\text{لَوس}} = ١٠^{\text{لوس}}$$

حيث ان كلا من هذين المقدارين الجبريين هو مقدار س فاذا أخذ اللوغاريتم النيبريانى للطرفين يحدث

$$\text{لَوس} = \text{لوس}\ \text{لَو}١٠$$

فاذا جعل

$$\text{م} = \frac{١}{\text{لَو}١٠} \qquad (٨)$$

يكون $\qquad \text{لوس} = \text{م}\ \text{لَوس}$

فيعلم من ذلك انه يحصل على اللوغاريتمات المعتادة بضرب اللوغاريتمات النيبريانية فى العدد الثابت م الذى يسمى مقياس اللوغاريتمات

وبواسطة القوانين المتقدمة فى البند السابق يمكن حساب م لانه اذا جعل ص=١ فى القانون (٧) يحدث

$$\text{لَو}٢ = ٢\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣\times٣^{٣}} + \frac{١}{٥\times٣^{٥}} + \frac{١}{٧\times٣^{٧}} + \frac{١}{٩\times٣^{٩}} + \cdots\right) \qquad (٩)$$

واذا جعل ص=٨ و ح=٢ فى القانون (٥) يحدث

$$\text{لَو}١٠ = ٣\,\text{لو}٢ + ٢\left(\frac{١}{٩} + \frac{١}{٣\times٩^{٣}} + \frac{١}{٥\times٩^{٥}} + \cdots\right) \qquad (١٠)$$

وعلى موجب القوانين (٨) و (٩) و (١٠) يحدث

$$\left.\begin{aligned} \frac{١}{\text{م}} &= ٦\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣\times٣^{٣}} + \frac{١}{٥\times٣^{٥}} + \cdots\right) \\ &+ ٢\left(\frac{١}{٩} + \frac{١}{٣\times٩^{٣}} + \frac{١}{٥\times٩^{٥}} + \cdots\right) \end{aligned}\right\} \qquad (١١)$$

فاذا حسب كل حد من القانون (١١) مشتملا على ثمانية وعشرين خانة أعشارية بحيث يمكن أخذ خمسة وعشرين خانة أعشارية فى مقدارى $\frac{١}{\text{م}}$ و م يوجد أن

$$\frac{١}{\text{م}} = ٢،٣٠٢٥٨\ ٥٠٩٢٩\ ٩٤٠٤٥\ ٦٨٤٠١\ ٧٩٩١٤٠٠٠٠ \quad \text{و} \qquad (١٢)$$

$$\text{م} = ٠،٤٣٤٢٩\ ٤٤٨١٩\ ٠٣٢٥١\ ٨٢٧٦٥\ ١١٢٨٩٠٠٠٠ \qquad (١٣)$$

بند ١١٥

بند ١١٥ حساب اللوغاريتمات المعتادة — يمكن استعمال القانونين (٤) و (٥) لاجل حساب اللوغاريتمات المعتادة اذا ضرب طرفاهما الثانيان فى المقياس م واذن يكون

$$\left.\begin{array}{l} لو(ص+ح)-لوص=م\left(\frac{ح}{ص}-\frac{ح^٢}{٢ص^٢}+\frac{ح^٣}{٣ص^٣}-\cdots\right) \quad و \\ لو(ص+ح)-لوص=٢م\left(\frac{ح}{٢ص+ح}+\frac{ح^٣}{٣(٢ص+ح)^٣}+\cdots\right) \end{array}\right\} (١٤)$$

واذا جعل ح=١ يحدث

$$\left.\begin{array}{l} لو(ص+١)-لوص=م\left(\frac{١}{ص}-\frac{١}{٢ص^٢}+\frac{١}{٣ص^٣}-\cdots\right) \quad و \\ لو(ص+١)-لوص=٢م\left(\frac{١}{٢ص+١}+\frac{١}{٣(٢ص+١)^٣}+\cdots\right) \end{array}\right\} (١٥)$$

وحيث كان المقياس م معلوما فيمكن استعمال القانونين (١٤) و (١٥) لاجل حساب اللوغاريتمات المعتادة

فى قانون ذات الحدين باس حيثما اتفق

بند ١١٦ لنفرض ان المطلوب تحليل $(ح+ى)^م$ فى الحالة التى يكون فيها حرف م دالا على عدد حيثما اتفق ولذلك نضع $\frac{ى}{ح}=س$ فيكون

$$(ح+ى)^م=\left[ح(١+س)\right]^م=ح^م(١+س)^م$$

وحينئذ تؤل المسئلة الى تحليل $(١+س)^م$ ولاجل تحصيل هذا التحليل الاخير نضع

$$ى(س)=(١+س)^م$$

وحيث ان المشتقات

$$ى'(س)=م(١+س)^{م-١} \quad , \quad ى''(س)=م(م-١)(١+س)^{م-٢} \quad ,\cdots\cdots \quad و$$

$$ى^{(ن)}(س)=م(م-١)\cdots(م-ن+١)(١+س)^{م-ن} \quad ,\cdots\cdots$$

تكون مستمرة مادام س < ١ فيكون

$$(١+س)^{م}=١+م س+\frac{م(م-١)}{١\times٢}س^{٢}+\cdots$$

$$+\frac{م(م-١)\cdots(م-ن+٢)}{١\times٢\cdots(ن-١)}س^{ن-١}+ر_{ن}$$

ولاجل ان تكون هذه المتسلسلة تقاربية يلزم ان تميل النسبة $\frac{م-ن+١}{ن}$ س الى نهاية يكون مقدارها الرقمى أقل من الواحد ولهذا يقتضى ان يكون س محصورا بين ‎−١ و ‎+١ وحينئذ يكفى اعتبار هذه الحالة

واذا استعملت الصورة الثانية للباقى يكون

$$ر_{ن}=\frac{م(م-١)\cdots(م-ن+١)}{١\times٢\cdots(ن-١)}س^{ن}\cdot(١+ح س)^{م-١}\cdot\left(\frac{١-ح}{١+ح س}\right)^{ن-١}$$

فالعامل الاول يميل الى الصفر متى صار ن لانهائيا اذ ان المتسلسلة التى حدها العمومى $\frac{(م-١)(م-٢)\cdots(م-ن+١)}{١\times٢\cdots(ن-١)}س^{ن}$ تقاربية كما يمكن تحقيقه بدون صعوبة

بشرط ان يكون س < ١ والعامل الثانى وهو $(١+ح س)^{م-١}$ مقداره محدود حيث

كان ١+ح س > ٠ على حسب ما فرضنا والعامل الثالث وهو $\left(\frac{١-ح}{١+ح س}\right)^{ن-١}$ اقل من الواحد لانه اذا كان س > ٠ يكون ١+ح س > ١ > ١−ح واذا كان س < ١ يكون س = −ل (وحرف ل رمز لعدد محصور بين ٠ و ١) وحينئذ يكون ح ل < ح و ١−ح ل > ١−ح وحينئذ فى كلتى الحالتين يكون

$$١>\frac{١-ح}{١+ح س}>٠$$

وحيث كان الباقى $ر_{ن}$ مركبا من ثلاثة عوامل أحدها نهايته صفرا ولا يزيد العاملان الآخران الى ما لا نهاية فتكون نهايته صفرا وحينئذ يمكن تطبيق متسلسلة مكلوران أعنى انه بأى مقدار للتغير س محصور بين ‎−١ و ‎+١ ومهما كان م يكن

$$(١+س)^{م}=١+م س+\frac{م(م-١)}{١\times٢}س^{٢}+\frac{م(م-١)(م-٢)}{١\times٢\times٣}س^{٣}+\cdots\quad(ع)$$

واما

وأما اذا كان المقدار المطلق للمتغير س أكبر من الواحد فان المتسلسلة تكون متباعدية وحينئذ لا يمكن تطبيق متسلسلة (ع) ما لم يكن م صحيحا وموجبا لانه في هذه الحالة تكون المشتقة برتبة م+١ للدالة $(١+\text{س})^{\text{م}}$ معدومة ويكون الباقي $\text{ر}_{\text{م}+١}$ معدوما أيضا وتحلل الدالة $(١+\text{س})^{\text{م}}$ بموجب قانون مكلوران الى كمية كثيرة الحدود محتوية على حدود عددها م+١ وتكون هذه الكمية مرتبة على حسب القوى التصاعدية للمتغير س

(تمرينات)

الاول قوس جا س $= \text{س} + \frac{١}{٢}\frac{\text{س}^٣}{٣} + \frac{١\times٣}{٢\times٤}\frac{\text{س}^٥}{٥} + \frac{١\times٣\times٥}{٢\times٤\times٦}\frac{\text{س}^٧}{٧} + \ldots$

الثاني $\text{هـ}^{\text{ح س}}\ \text{جتا ه س} = ١ + (\text{ح}^٢+\text{ه}^٢)^{\frac{١}{٢}}\ \text{جتا ى}\ \frac{\text{س}}{١} + (\text{ح}^٢+\text{ه}^٢)\ \text{جتا ٢ى}\ \frac{\text{س}^٢}{١\times٢}$

$+ (\text{ح}^٢+\text{ه}^٢)^{\frac{٣}{٢}}\ \text{جتا ٣ى}\ \frac{\text{س}^٣}{١\times٢\times٣} + (\text{ح}^٢+\text{ه}^٢)^٢\ \text{جتا ٤ى}\ \frac{\text{س}^٤}{١\times٢\times٣\times٤} + \ldots$

وفي هذا المثال $\text{ى} = \text{قوس طا}\ \frac{\text{ه}}{\text{ح}}$

الثالث $(\text{قوس جا س})^٢ = ٢\left(\frac{\text{س}^٢}{٢} + \frac{٢}{٣}\frac{\text{س}^٤}{٤} + \frac{٢\times٤}{٣\times٥}\frac{\text{س}^٦}{٦} + \frac{٢\times٤\times٦}{٣\times٥\times٧}\frac{\text{س}^٨}{٨} + \ldots\right)$

الفصل الثاني

في المقدار الحقيقي للدوال التي توجد بصورة يتبين منها ان مقدارها غير معين

بند ١١٧ المقدار الحقيقي لدالة من هذا القبيل هو المقدار الذي تأخذه على حسب قانون الاستمرار فهو النهاية التي تميل اليها هذه الدالة متى مال المتغير الى المقدار الذي به تصير غير معينة في الظاهر

والصور الشهيرة التي بها يكون مقدار الدالة غير معين في الظاهر هي

$\frac{٠}{٠}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $٠\times\infty$ و ١^{∞} و $٠^{٠}$

ولنبدأ بالصورة الاولى التى يمكن ايلولة الصور الاخرى اليها فنقول

بند ١١٨ لنفرض ان كسرا يئول الى الصورة $\frac{٠}{٠}$ حينما يكون المتغير س = ك ففى بعض الاحوال يمكن تحصيل المقدار الحقيقى بواسطة اعتبارات جبرية مثلا لنعتبر الكسر $ص = \frac{ق}{و}$ الذى حداه ق , و كميتان كثيرتا الحدود صحيحتان بالنسبة للمتغير س فاذا آل هذا الكسر الى الصورة $\frac{٠}{٠}$ متى أخذ المتغير س مقدارا مخصوصا وليكن ك يكون حداه هذا الكسر قابلين للقسمة فى آن واحد على س ــ ك ويمكن ان يكتب

$$ص = \frac{ق}{و} = \frac{(س-ك)^{م}\,ع}{(س-ك)^{ه}\,ر} = (س-ك)^{م-ه} \times \frac{ع}{ر} \qquad (١)$$

وهناك ثلاث حالات الاولى ان يكون م > ه والثانية ان يكون م = ه والثالثة ان يكون م < ه

(الحالة الاولى) اذا كان م > ه فان ذات الحدين س ــ ك تكون مرفوعة الى قوة موجبة فى المعادلة (١) وتبقى فى البسط بحيث انه متى جعل س = ك يكون ص = ٠

(الحالة الثانية) اذا كان م = ه فان العامل س ــ ك يمحى من حدى الكسر ويكون $ص = \frac{ع}{ر}$

(الحالة الثالثة) اذا كان م < ه يؤل قانون (١) الى

$$ص = \frac{١}{(س-ك)^{م-ه}}\,\frac{ع}{ر}$$

ومتى جعل س = ك يكون $ص = \frac{ع}{٠}$ ويكون مقدار الدالة ص لانهائيا

بند ١١٩ يمكن الوصول الى نتيجة أبسط وأعم بتحليل حدى الكسر بواسطة متسلسلة تيلور وتطبيق القاعدة التى يتوصل اليها على الدوال العالية بشرط انه يمكن تطبيق متسلسلة تيلور على الدوال العالية المفروضة

فلنفرض انه حينما يكون س = ك يأخذ الكسر

$$ص = \frac{د(س)}{د_{١}(س)}$$

الصورة $\frac{\cdot}{\cdot}$ [د(س) و د$_١$(س) دالتان حيثما اتفق] فيمكن كتابة هذه الدالة هكذا

$$ص = \frac{د\left[ك + (س - ك)\right]}{د_١\left[ك + (س - ك)\right]}$$

واذا حللنا حدى هذا الكسر بواسطة قانون تيلور معتبرين س ـ ك الزيادة التى تعطى للمتغير ك يكون

$$ص = \frac{د(ك) + (س - ك)\bar{د}(ك) + \frac{(س - ك)^٢}{١ \times ٢}\bar{\bar{د}}(ك) + \frac{(س - ك)^٣}{١ \times ٢ \times ٣}\bar{\bar{\bar{د}}}(ك) + \cdots\cdot}{د_١(ك) + (س - ك)\bar{د}_١(ك) + \frac{(س - ك)^٢}{١ \times ٢}\bar{\bar{د}}_١(ك) + \frac{(س - ك)^٣}{١ \times ٢ \times ٣}\bar{\bar{\bar{د}}}_١(ك) + \cdots\cdot} \quad (ف)$$

ويكون مقدار ص خارج قسمة متسلسلتين على بعضهما وحيث ان د(س) و د$_١$(س) تنعدمان فرضا متى جعل س = ك فيكون د(ك) = ٠ و د$_١$(ك) = ٠ وحينئذ يمكن قسمة حدى الكسر على س ـ ك وبهذا يكون

$$ص = \frac{\bar{د}(ك) + \frac{س - ك}{١ \times ٢}\bar{\bar{د}}(ك) + \frac{(س - ك)^٢}{١ \times ٢ \times ٣}\bar{\bar{\bar{د}}}(ك) + \cdots}{\bar{د}_١(ك) + \frac{س - ك}{١ \times ٢}\bar{\bar{د}}_١(ك) + \frac{(س - ك)^٢}{١ \times ٢ \times ٣}\bar{\bar{\bar{د}}}_١(ك) + \cdots}$$

واذا جعلنا س = ك يكون المقدار الحقيقى هو

$$ص = \frac{\bar{د}(ك)}{\bar{د}_١(ك)}$$

ما لم يكن

$$\bar{د}(ك) = ٠ \quad و \quad \bar{د}_١(ك) = ٠$$

فى آن واحد فان وقعت هذه الحالة يوجد ص أيضا بالصورة $\frac{\cdot}{\cdot}$ فاذا رجعنا الى القانون (ف) نرى ان معاملى (س ـ ك) ينعدمان من حدى الكسر وكذلك تنعدم الكميتان الثابتتان ويكون حدا الكسر قابلين للقسمة على (س ـ ك)^٢ فاذا أجريت عملية القسمة ثم جعل س = ك يكون المقدار الحقيقى المطلوب هو

$$ص = \frac{د(ك)}{د_1(ك)}$$

وأيضا اذا كان

$$د(ك)=٠ \quad و \quad د_1(ك)=٠$$

يشاهد كذلك انه يجب ان يكون المقدار الحقيقى هو

$$\frac{د''(ك)}{د''_1(ك)}$$

وهلم جرا ومن هنا تنتج هذه القاعدة وهى

المقدار الحقيقى لاى كسر يوجد بالصورة ٠/٠ حينما يعطى للتغير المقدار س=ك يساوى النسبة بين المقدارين اللذين تأخذهما أول مشتقتين برتبة واحدة لاتنعدمان فى آن واحد حينما يجعل س=ك

ويمكن أن يقال ان المقدار الحقيقى يساوى النسبة بين المشتقتين برتبة اولى لحدى الكسر المفروض وذلك بالاصطلاح على تطبيق هذه القاعدة على الكسر الجديد المستنتج اذا وجد أيضا بالصورة ٠/٠

بند ١٢٠ ولنطبق هذه القاعدة على بعض أمثلة فنقول

(الاول) المطلوب ايجاد المقدار الحقيقى للكسر $\frac{حا س}{س}$ حينما يجعل س=٠

فلحل هذه المسئلة نعلم ان النسبة بين المشتقتين هى

$$\frac{جتا س}{1} = جتا س$$

وهى تساوى الواحد حينما يكون س=٠ فاذن يكون المقدار الحقيقى المطلوب هو الواحد

(الثانى) المراد تعيين المقدار الحقيقى للدالة $\frac{ظا س}{س}$ حينما يكون س=٠

فالنسبة بين المشتقتين هى

$$\frac{\frac{1}{جتا^2 س}}{1}$$

وهى تساوى $\frac{1}{1}$ أى الوحدة حينما يجعل س=٠

(الصورة $\frac{\infty}{\infty}$)

١٢١ـ لنعتبر كسرا يوجد بالصورة $\frac{\infty}{\infty}$ فيسهل مشاهدة ان هذه الحالة لاتخالف الحالة المتقدمة اذان

$$\frac{\text{ء}(\text{س})}{\text{ء}_1(\text{س})}=\frac{\frac{1}{\text{ء}_1(\text{س})}}{\frac{1}{\text{ء}(\text{س})}}$$

فاذا وجد الكسر الاول بالصورة $\frac{\infty}{\infty}$ حينما يجعل سـ مساويا لمقدار مخصوص يعطى للمتغير سـ يوجد الكسر الثانى بالصورة $\frac{0}{0}$ متى جعل سـ مساويا للمقدار المذكور وحينئذ يمكن تطبيق القاعدة المتقدمة على الكسر الثانى وبناء على ذلك يكون المقدار الحقيقى هو مقدار الكسر

$$\frac{\text{ء}'_1(\text{س})}{\text{ء}'(\text{س})}\times\frac{[\text{ء}(\text{س})]^2}{[\text{ء}_1(\text{س})]^2}=\frac{-\frac{\text{ء}'_1(\text{س})}{[\text{ء}_1(\text{س})]^2}}{-\frac{\text{ء}'(\text{س})}{[\text{ء}(\text{س})]^2}}$$

فاذا جعل سـ = ك فى الكسر المعتبر يؤول الى $\frac{\text{ء}(\text{ك})}{\text{ء}_1(\text{ك})}$ وحيث ان مقداره مبين بالطرف الثانى من المعادلة السابقة فيكون

$$\frac{\text{ء}'_1(\text{ك})}{\text{ء}'(\text{ك})}\times\frac{[\text{ء}(\text{ك})]^2}{[\text{ء}_1(\text{ك})]^2}=\frac{\text{ء}(\text{ك})}{\text{ء}_1(\text{ك})}$$

وبحذف العامل المشترك فى الطرفين يحدث

$$\frac{\text{ء}'_1(\text{ك})}{\text{ء}'(\text{ك})}\times\frac{\text{ء}(\text{ك})}{\text{ء}_1(\text{ك})}=1$$

ومن هنا يحدث

$$\frac{د(ك)}{د_١(ك)} = \frac{دَ(ك)}{دَ_١(ك)}$$

وحينئذ اذا وجد الكسر بالصورة $\frac{\infty}{\infty}$ فلا فائدة في التحويل الى الصورة $\frac{0}{0}$ حيث أن المقدار الحقيقي يتحصل أيضا بأخذ النسبة بين المشتقين

بند ١٢٢ مثال — ليكن المطلوب ايجاد المقدار الحقيقي للدالة $\frac{لوس}{س^{ن}}$ حينما يجعل

$س = \infty$

فلذلك نأخذ النسبة بين المشتقين فنجد أن هذه النسبة هي

$$\frac{\frac{١}{س}}{ن س^{ن-١}} = \frac{١}{ن س^{ن}}$$

ومتى جعل $س = \infty$ تكون هذه النسبة مساوية للصفر

بند ١٢٣ الصور الاخرى يمكن تحويلها الى الصورتين السابقتين فلنتصدى مثلا للصورة $0 \times \infty$ فنقول

ليكن الحاصل $د(س) د_١(س)$ الذي يوجد بالصورة $0 \times \infty$ حينما يكون $س = ك$ فيكون

$$د(س) د_١(س) = \frac{د(س)}{\frac{١}{د_١(س)}}$$

ويتحول حينئذ الى احدى الصورتين السابقتين وهما $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$

بند ١٢٤ ولم يبق علينا الا الكلام على الصورتين ∞^{0} و 0^{0} وهاتان الصورتان تحولان بواسطة اللوغاريتمات الى الصورة التي تقدمت في البند السابق

فلنفرض انه اذا جعل $س = ك$ يوجد المقدار الجبري

$$د(س)^{د_١(س)}$$

بالصورة ∞^{0} او بالصورة 0^{0} فبأخذ اللوغاريتم النبيرياني يوجد الحاصل

$$د_١(س) لو د(س)$$

وهذا

وهذا الحاصل يأخذ الصورة $\infty\times ٠$ اذا كانت $\text{ءَ}(\text{ك})=\infty$ و $\text{ء}(\text{ك})=١$ أو يأخذ الصورة $٠\times\infty$ اذا كانت $\text{ءَ}(\text{ك})=٠$ و $\text{ء}(\text{ك})=٠$ وهي حالة يكون فيها $\text{لوء}(\text{ك})=-\infty$

وفي كلتا الحالتين يتحول الى صورة سبق الكلام عليها ومتى تحصل المقدار الحقيقي للحاصل $\text{ءَ}(\text{س})\,\text{لوء}(\text{س})$ يلزم لاجل تحصيل المقدار الحقيقي للدالة المفروضة ان يبحث عن العدد المطابق لهذا اللوغاريتم

مثلا لتكن $\text{ص}=(\text{جتاس})^{\text{ظتاس}}$ وليكن المطلوب البحث عن المقدار الحقيقي لهذه الدالة حينما يكون $\text{س}=٠$

فلذلك نأخذ اللوغاريتم النيبيري لطرفين فيحدث

$$\text{لوص}=\text{ظتاس}\,\text{لوجتاس}=\frac{\text{لوجتاس}}{\text{ظاس}}$$

فاذا جعل $\text{س}=٠$ يكون $\text{جتاس}=١$ ويكون $\text{لوجتاس}=٠$ و $\text{ظاس}=٠$ وحينئذ يوجد هذا المقدار الجبري الاخير بالصورة $\frac{٠}{٠}$ فتؤخذ النسبة بين المشتقتين فيكون

$$\frac{\frac{١}{\text{جتاس}}\,\text{فاجتاس}}{\text{فاظاس}}=\frac{-\frac{\text{حاس}}{\text{جتاس}}}{\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}}=-\frac{\text{حاس}\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جتاس}}=-\text{حاس}\,\text{جتاس}$$

فاذا جعل $\text{س}=٠$ يكون هذا المقدار الجبري معدوما واذن يكون المقدار المطلوب مقدارا لوغاريتمه معدوم واذن فهو الواحد

تنبيه — كان يمكن أيضا أن يوضع

$$\text{لوص}=\frac{\text{ظتاس}}{\frac{١}{\text{لوجتاس}}}$$

والوصول الى الصورة $\frac{\infty}{\infty}$ وكان يتوصل الى الناتج بعينه بأخذ النسبة بين المشتقتين الا أن هاتين المشتقتين أقل بساطة منهما في الحالة الاولى

(مسائل متنوعة)

بند ١٢٥ المطلوب ايجاد المقدار الحقيقي للدالة $\frac{\text{ه}^{\text{س}}}{\text{س}^{\text{ن}}}$ حينما يجعل س = ∞ (ن عدد صحيح موجب)

فالنسبة بين المشتقتين اللتين برتبة أولى وهي

$$\frac{\text{ه}^{\text{س}}}{\text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}}$$

تؤول كالكسر المفروض الى $\frac{\infty}{\infty}$ متى جعل س = ∞ فاذا أخذنا النسبة بين مشتقى الحدين يحدث

$$\frac{\text{ه}^{\text{س}}}{\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{س}^{\text{ن}-2}}$$

وهذا الكسر الجديد يؤول كالكسر المفروض الى $\frac{\infty}{\infty}$ متى جعل س = ∞ وبتكرار هذه العملية يتوصل أخيرا الى هذه النسبة

$$\frac{\text{ه}^{\text{س}}}{\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots 3\times 2\times 1}$$

الواقعة بين المشتقتين النونيتين لحدى الكسر المفروض وهذه النسبة تؤول الى ∞ حينما يكون س لانهائيا واذن يكون المقدار الحقيقي المبحوث عنه لانهائيا

بند ١٢٦ المطلوب ايجاد المقدار الحقيقي للكسر

$$\frac{\text{د}(\text{س}+\text{ح})-\text{د}(\text{س})}{\text{ح}}$$

حينما يكون ح معدوما

فلذلك نقول حيث انه متى كان ح = ٠ يوجد الكسر المفروض بالصورة $\frac{0}{0}$ فنأخذ النسبة بين مشتقى حديه بالنسبة الى ح وهى $\frac{\text{د}'(\text{س}+\text{ح})}{1}$ ثم نجعل ح = ٠ فبهذا تؤول الى د'(س) وهى نتيجة معلومة قد اتخذناها تعريفا للمشتقة

ولنبحث عن المقدار الحقيقي للكسر

$$\frac{\text{د}(\text{س}+٢\text{ح})-٢\text{د}(\text{س}+\text{ح})+\text{د}(\text{س})}{\text{ح}^{٢}}$$

حينما يجعل ح=٠ فنقول
بالبحث عن النسبة بين مشتقتي حديه بالنسبة الى ح توجدانها

$$\frac{\text{د}'(\text{س}+٢\text{ح})\times٢-٢\text{د}'(\text{س}+\text{ح})}{٢\text{ح}}=\frac{\text{د}'(\text{س}+٢\text{ح})-\text{د}'(\text{س}+\text{ح})}{\text{ح}}$$

فاذا جعل ح=٠ يوجد هذا الكسر الجديد كالكسر المفروض بالصورة ÷ وحينئذ يلزم تكرار العملية وبذلك يحدث

$$\frac{\text{د}''(\text{س}+٢\text{ح})\times٢-\text{د}''(\text{س}+\text{ح})}{١}$$

وهذا الكسر يؤول الى $\text{د}''(\text{س})$ حينما يجعل ح=٠ وهى نتيجة معلومة أيضا
و بمثل ذلك يشاهد بالسهولة ان المقدار الحقيقي للكسر

$$\frac{\text{د}(\text{س}+٣\text{ح})-٣\text{د}(\text{س}+٢\text{ح})+٣\text{د}(\text{س}+\text{ح})-\text{د}(\text{س})}{\text{ح}^{٣}}$$

حينما يجعل ح=٠ هو $\text{د}'''(\text{س})$ وهلم جرًا

(تمرينات)

المطلوب تحقيق هذا الجدول وهو

الدالة ص	المتغير س	الناتج
$\frac{\text{س}^3-4\text{ح}\text{س}^2+5\text{ح}^2\text{س}-2\text{ح}^3}{\text{س}^3-3\text{ح}^2\text{س}-2\text{ح}^3}$	$\text{س}=2$	$\frac{1}{9}$
$\frac{1-(\text{م}+1)\text{س}^{\text{م}}+\text{م}\text{س}^{\text{م}+1}}{(1-\text{س})^2}$	$\text{س}=1$	$\frac{\text{م}(\text{م}+1)}{2}$
$\frac{\sqrt{\text{ح}^2+\text{ح}\text{س}+\text{س}^2}-\sqrt{\text{ح}^2-\text{ح}\text{س}+\text{س}^2}}{\sqrt{\text{ح}+\text{س}}-\sqrt{\text{ح}-\text{س}}}$	$\text{س}=0$	$\sqrt{\text{ح}}$
$\frac{\text{ح}^{\text{س}}-\text{د}^{\text{س}}}{\text{جاس}}$	$\text{س}=0$	$\text{لو}\left(\frac{\text{ح}}{\text{د}}\right)$
$\frac{\text{ه}^{\text{س}}-\text{ه}^{-\text{س}}-2\text{س}}{\text{س}-\text{جاس}}$	$\text{س}=0$	2
$\frac{\text{س}^{\text{س}}-1}{\text{س}^{\text{م}}+\text{س}\overset{\text{ه}}{\text{لو}}\text{س}-1}$	$\text{س}=1$	$\frac{1}{1+\text{م}}$
$\frac{\text{س}(\text{ه}^{\text{س}}+1)-2(\text{ه}^{\text{س}}-1)}{\text{س}^2(\text{ه}^{\text{س}}-1)}$	$\text{س}=0$	$\frac{1}{6}$
$\frac{(1+\text{س})^{\frac{1}{\text{س}}}-\text{ه}}{\text{س}}$	$\text{س}=0$	$-\frac{\text{ه}}{2}$
$\frac{\text{س}\,\text{جا}(\text{جاس})-\text{جا}^2\text{س}}{\text{س}^6}$	$\text{س}=0$	$\frac{1}{18}$
$\frac{\text{ح}^{\text{س}}}{\text{س}^{\text{ه}}}\quad(\text{ه}>0)$	$\text{س}=\infty$	∞
$\frac{\text{لو}(\text{ح}+\text{د}\text{ه}^{\text{س}})}{\sqrt{\text{ل}+\text{ك}\text{س}^2}}$.	$\text{س}=\infty$	$\frac{1}{\sqrt{\text{ك}}}$

الفصل الثالث

فى قانونى تيلور ومكلوران للدوال ذات المتغيرات المتعددة

بـ ١٢٧ د لتكن $ه = د(س ، ص ، ع ، ...)$

دالة ذات متغيرات غير متعلقة عددها م ولتكن س ، ص ، ع ، ... ولنقصد تحليل الدالة

$$ه + ف ه = د(س + ح ، ص + ك ، ع + ل ، ...)$$

الى متسلسلة مرتبة على حسب القوى التصاعدية الموجبة للزيادات ح ، ك ، ل ، ...
ولذلك نعلم ان الكمية ه + ف ه هى المقدار التى تأخذه هذه الدالة

$$ه_١ = د(س + ح ر ، ص + ك ر ، ع + ل ر ، ...)$$

التى هى دالة للمتغير ر حينما يجعل ر = ١ وهذه الدالة يحصل عليها بتعويض ح ، ك ، ل ، ... بالمقادير ح ر ، ك ر ، ل ر ، ... على التناظر فى مقدار ه + ف ه ويعلم من ذلك انه لاجل حل المسئلة المفروضة يكفى تحليل ه١ الى متسلسلة مرتبة على حسب قوى ر بموجب قانون مكلوران ثم جعل ر = ١ فى الناتج فاذا جعلنا

$$س + ح ر = و ، ص + ك ر = ى ، ع + ل ر = ح ، ...$$

يكون

$$ه_١ = د(و ، ى ، ح ، ...)$$

واذن يكون

$$فا ه_١ = \frac{فا ه_١}{فا و} فا و + \frac{فا ه_١}{فا ى} فا ى + \frac{فا ه_١}{فا ح} فا ح + ...$$

وحيث ان و ، ى ، ح ، ... دوال خطية للمتغير ر الغير المتعلق فبموجب ما تقرر فى بـ ٧٦ د يكون

$$فا^{ه} ه_١ = \left(\frac{فا ه_١}{فا و} فا و + \frac{فا ه_١}{فا ى} فا ى + \frac{فا ه_١}{فا ح} فا ح + ... \right)^{ه}$$

مهما كان ه

وحيث ان $فاو = ح\,فار$, $فاى = ك\,فار$, $فاح = ل\,فار$, ... فيكون

$$\frac{فا^{ه}\,ق_{١}}{فار^{ه}} = \left(ح\,\frac{فا\,ق_{١}}{فاو} + ك\,\frac{فا\,ق_{١}}{فاى} + ل\,\frac{فا\,ق_{١}}{فاح} + \cdots\right)^{ه}$$

والكون أن $\frac{فا\,ق_{١}}{فاو} = \frac{فا\,ق_{١}}{فاس}$, ... فيمكن ان يكتب

$$\frac{فا^{ه}\,ق_{١}}{فار^{ه}} = \left(ح\,\frac{فا\,ق_{١}}{فاس} + ك\,\frac{فا\,ق_{١}}{فاص} + ل\,\frac{فا\,ق_{١}}{فاع} + \cdots\right)^{ه}$$

وحينما يكون $ر=٠$ يكون

$$ق_{١} = ق$$

و يؤل القانون السابق الى

$$\frac{فا^{ه}\,ق_{١}}{فار^{ه}} = \left(ح\,\frac{فا\,ق}{فاس} + ك\,\frac{فا\,ق}{فاص} + ل\,\frac{فا\,ق}{فاع} + \cdots\right)^{ه}$$

وحينئذ بتطبيق قانون مكلوران على الدالة $ق_{١}$ يحدث

$$ق_{١} = ق + \frac{ر}{١}\left(ح\,\frac{فا\,ق}{فاس} + ك\,\frac{فا\,ق}{فاص} + ل\,\frac{فا\,ق}{فاع} + \cdots\right)$$

$$+ \frac{ر^{٢}}{١\times٢}\left(ح\,\frac{فا\,ق}{فاس} + ك\,\frac{فا\,ق}{فاص} + ل\,\frac{فا\,ق}{فاع} + \cdots\right)^{٢} + \cdots$$

$$+ \frac{ر^{ه-١}}{١\times٢\cdots(ه-١)}\left(ح\,\frac{فا\,ق}{فاس} + ك\,\frac{فا\,ق}{فاص} + ل\,\frac{فا\,ق}{فاع} + \cdots\right)^{ه-١} + ى_{ه}$$

والباقى $ى_{ه}$ يساوى حاصل ضرب $\frac{ر^{ه}}{١\times٢\cdots\times ه}$ فى المقدار الذى تأخذه المشتقة

$\frac{فا^{ه}\,ق_{١}}{فار^{ه}}$ متى عوض $ر$ فيها بالكمية $ى ر$ التى فيها $ى$ رمز لكمية محصورة بين ٠ و ١

وحينئذ يكون

$ى_{ه}$

$$ب = \frac{ر^{ن}}{١ \times ٢ \cdots \times ن}$$

$$\times \left(ح \frac{فاق}{فاس} + ك \frac{فاق}{فاص} + ل \frac{فاق}{فاع} + \cdots \right)^{ن}_{س + ح ر \text{ و } ص + ك ر \text{ و } ع + ل ر \text{ و } \cdots}$$

والكميات $س + ح ر$ ، $ص + ك ر$ ، ... تدل على انه يلزم تعويض $س$ و $ص$ و $ع$ و ... بالكميات $س + ح ر$ ، $ص + ك ر$ و ...

فاذا جعلنا الآن $ر = ١$ يكون

$$\left.\begin{aligned} ق + ف ق = ق + & \frac{\left(ح \frac{فاق}{فاس} + ك \frac{فاق}{فاص} + ل \frac{فاق}{فاع} + \cdots \right)}{١} \\ + & \frac{\left(ح \frac{فاق}{فاس} + ك \frac{فاق}{فاص} + ل \frac{فاق}{فاع} + \cdots \right)^{٢}}{١ \times ٢} + \cdots \\ + & \frac{\left(ح \frac{فاق}{فاس} + ك \frac{فاق}{فاص} + ل \frac{فاق}{فاع} + \cdots \right)^{ن-١}}{١ \times ٢ \cdots (ن-١)} + ب_{ن} \end{aligned}\right\} \quad (١)$$

ويكون

$$ب_{ن} = \frac{١}{١ \times ٢ \cdots \times ن}$$

$$\times \left(ح \frac{فاق}{فاس} + ك \frac{فاق}{فاص} + ل \frac{فاق}{فاع} + \cdots \right)^{ن}_{س + ح \text{ و } ص + ك \text{ و } ع + ل \text{ و } \cdots} \quad (٢)$$

مثلا في الحالة التي تعتبر فيها دالة ولتكن $د(س ، ص)$ لمتغيرين يكون

$$د(س + ح ، ص + ك) = د(س ، ص) + \left(ح \frac{فاد}{فاس} + ك \frac{فاد}{فاص} \right)$$

$$+ \frac{١}{١ \times ٢} \left(ح^{٢} \frac{فا^{٢}د}{فاس^{٢}} + ٢ ح ك \frac{فا^{٢}د}{فاس فاص} + ك^{٢} \frac{فا^{٢}د}{فاص^{٢}} \right) + \cdots$$

$$+ \frac{١}{١ \times ٢ \cdots (ن-١)} \left(ح^{ن-١} \frac{فا^{ن-١}د}{فاس^{ن-١}} + \frac{ن-١}{١} ح^{ن-٢} ك \frac{فا^{ن-١}د}{فاس^{ن-٢} فاص} + \cdots \right.$$

$$+ \text{ك}^{ن-١} \left(\frac{\text{فا}^{ن-١} \text{ى}}{\text{فاص}^{ن-١}}\right) + \text{بـ}_{ن}$$

ويكون مقدار الباقى هو

$$\frac{١}{٢ \times \cdots \times ن} \times \left[\text{ح}^{ن} \frac{\text{فا}^{ن} \text{ى}}{\text{فاس}^{ن}} + \frac{ن}{١} \text{ح}^{ن-١} \text{ك} \frac{\text{فا}^{ن} \text{ى}}{\text{فاس}^{ن-١} \text{فاص}} + \cdots + \text{ك}^{ن} \frac{\text{فا}^{ن} \text{ى}}{\text{فاص}^{ن}} \right]_{\text{س}+\text{ئـ ح و ص}+\text{ئـ ك}}$$

ومتى مال الباقى $\text{بـ}_{ن}$ الى الصفر حينما يزداد ن الى مالانهاية يؤل قانون (١) الى

$$\text{ف ى} = \frac{\text{ح} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاس}} + \text{ك} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاص}} + \text{ل} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاع}} + \cdots}{١} + \frac{\left(\text{ح} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاس}} + \text{ك} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاص}} + \text{ل} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاع}} + \cdots\right)^{٢}}{١ \times ٢} + \cdots \qquad (٣)$$

وهو قانون تيلور للدوال ذات المتغيرات المتعددة

وحيث كانت س و ص و ع و ... متغيرات غير متعلقة فيكون

$$\text{فا ى} = \text{ح} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاس}} + \text{ك} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاص}} + \text{ل} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاع}} + \cdots$$

ويكون

$$\text{فا}^{ن} \text{ى} = \left(\text{ح} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاس}} + \text{ك} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاص}} + \text{ل} \frac{\text{فا ى}}{\text{فاع}} + \cdots\right)^{ن}$$

وحينئذ يمكن كتابة قانون (٣) هكذا

$$\text{ف ى} = \frac{\text{فا ى}}{١} + \frac{\text{فا}^{٢} \text{ى}}{١ \times ٢} + \frac{\text{فا}^{٣} \text{ى}}{١ \times ٢ \times ٣} + \cdots \qquad (٤)$$

وتكون صورته كما فى حالة الدوال ذات المتغير الواحد

١٢٨ـ اذا لوحظت الشروط التى يجب استيفاؤها لاجل صحة قانون مكلوران فى حالة الدوال ذات المتغير الواحد يعلم ان قانون (١) يستلزم ان تكون الدالة ى ومشتقاتها الجزئية لغاية المشتقات برتبة ن-١ مستمرة بالنسبة لكل من المتغيرات مادامت

هذه

هذه المتغيرات محصورة على التناظر بين س , س+ح و ص , ص+ك
ع , ع+ل , ... ويستلزم خلاف ذلك ان توجد المشتقات الجزئية برتبة ن
بصور معينة

ومتى كانت الزيادات ح , ك , ل , ... صغيرة جدا وبقيت النسب الواقعة بينها
غير معينة فان النسبة الكائنة بين الباقي والحد الموقوف به القانون تكون كمية صغيرة
جدا بشرط ان لا يكون هذا الحد الاخير معدوما لانه حيث كانت المشتقات الجزئية
للدالة د مفروضة مستمرة لغاية المشتقات الجزئية التي برتبة ن-١ فيكون

$$ى'_{ن-١} = \frac{\bar{فا}^{ن-١} د}{١×٢\cdots(ن-١)}$$

والرمز $\bar{فا}$ رمز لما يؤول اليه التفاضل $فا^{ن-١} د$ متى عوضت فيه المتغيرات س , ص
, ع , ... بالكميات س+ىح , ص+ىك , ع+ىل , ... على
التناظر وغير ذلك يعلم أن

$$ى'_{ن-١} = \frac{فا^{ن-١} د}{١×٢\cdots(ن-١)} + ى'_{ن}$$

واذن يكون

$$\frac{ى'_{ن}}{\frac{فا^{ن-١} د}{١×٢\cdots ن}} = \frac{\bar{فا}^{ن-١} د - فا^{ن-١} د}{فا^{ن-١} د}$$

فيشاهد ان الطرف الثاني من هذا القانون يميل الى الصفر حينما تميل الزيادات ح , ك
, ل , ... اليه مادامت نهايات نسب هذه الكميات الصغيرة جدا الى احداها غير
معينة ولم يكن $فا^{ن-١}$ د معدوما

وينتج من ذلك انه اذا كانت المقادير المطلقة للزيادات ح , ك , ل , ... صغيرة
صغرا كافيا يكون المقدار المطلق للباقي $ى'_{ن}$ أقل من المقدار المطلق للحد الاخير

$$\frac{فا^{ن-١} د}{١×٢\cdots ن}$$

بند ١٢٩ ولاجل تحصيل قانون مكلوران للدوال ذات المتغيرات المتعددة نفرض انعدام

سه و صه و ع و ... فى القانونين (١) و (٢) ثم نكتب سه و صه و ع و ...
بدل ح و ك و ل و ... على التناظر فيكون

$$\left.\begin{aligned} \text{ق} = \text{ق}_{\circ} &+ \frac{\text{سه}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاسه}}\right)_{\circ} + \text{صه}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاصه}}\right)_{\circ} + \text{ع}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاع}}\right)_{\circ} + \cdots}{1} \\ &+ \frac{\left[\text{سه}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاسه}}\right)_{\circ} + \text{صه}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاصه}}\right)_{\circ} + \text{ع}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاع}}\right)_{\circ} + \cdots\right]^{2}}{1\times 2} \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{\left[\text{سه}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاسه}}\right)_{\text{ے}} + \text{صه}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاصه}}\right)_{\text{ے}} + \text{ع}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاع}}\right)_{\text{ے}} + \cdots\right]^{\text{ن}-1}}{1\times 2\cdots(\text{ن}-1)} + \text{ر}_{\text{ن}} \end{aligned}\right\} (٥)$$

ويكون

$$\text{ر}_{\text{ن}} = \frac{1}{1\times 2\cdots\text{ن}}\left[\text{سه}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاسه}}\right)_{\circ} + \text{صه}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاصه}}\right)_{\circ} + \text{ع}\left(\frac{\text{فاق}}{\text{فاع}}\right)_{\circ} + \cdots\right]^{\text{ن}} \quad (٦)$$

والصفر الفرنساوى الموضوع تحت كل دالة يستدل به على انه يجب تعويض المتغيرات سه و صه و ع و ... بالصفر وحرف ے الموضوع تحت الدوال الداخلة فى قانون الباقى يستدل به على وجوب تعويض المتغيرات المذكورة بالكميات ےسه و ےصه و ےع و ...

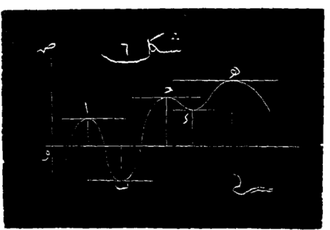
الفصل الرابع
في النهاية الكبرى والنهاية الصغرى

في النهاية الكبرى والنهاية الصغرى للدوال ذات المتغير الواحد الغير المتعلق

بند ١٣٠ لتكن د(س) دالة ذات متغير واحد وهو س فاذا زيد س وأخذت الدالة مقدارا حقيقيا أكبر من المقادير السابقة له مباشرة والتابعة له مباشرة يقال لهذا المقدار نهاية كبرى للدالة ويسمى نهاية صغرى للدالة المذكورة كل مقدار لهذه الدالة أصغر من المقادير السابقة والتالية له مباشرة

ويؤخذ من هذا التعريف انه اذا صارت الدالة د(س) نهاية كبرى حينما يكون س=ك يكون الفرق د(ك+ح)−د(ك) سالبا مهما كانت اشارة ح بشرط ان يؤخذ ح صغيرا بقدر ما يراد وان هذا الفرق يكون موجبا اذا كانت د(ك) نهاية صغرى

بند ١٣١ يمكن ان يكون للدالة جملة نهايات كبرى وجملة نهايات صغرى يعقب بعضها بعضا وقد تكون نهاية كبرى أقل من نهاية صغرى وكل نهاية كبرى سالبة تصير نهاية صغرى اذا صرف النظر عن اشارتها وكذا اذا صرف النظر عن اشارة أى نهاية صغرى سالبة فان هذه النهاية الصغرى تصير نهاية كبرى وتتضح هذه النتائج المستنبطة من التعريف بامعان النظر في المنحنى الجيبي ا ب ح ء هـ (شكل ٦) فلتكن ص=د(س) معادلة هذا المنحنى



فمن الواضح ان النهايات الكبرى والنهايات الصغرى هي رأسيات النقط ا و ب و ح

و . . . التي فيها المماس موازٍ لمحور السينات ويشاهد ان رأسي نقطة ا الذي هو نهاية كبرى أقل من رأسي نقطة ء الذي هو نهاية صغرى وان رأسي نقطة ب الذي يكون نهاية كبرى اذا اعتبر مقداره المطلق فقط يكون نهاية صغرى اذا أخذ باشارته

نمرة ١٣٢ د من المعلوم ان الدالة ء(س) تأخذ في الازدياد بدون انقطاع متى زيد س زمنا ما وبقيت المشتقة ءَ(س) موجبة وان ء(س) تأخذ في النقص مادامت المشتقة سالبة ويتنتج من ذلك ان ء(س) لا تصير نهاية كبرى ولا نهاية صغرى مادامت المشتقة حافظة لاشارة واحدة متى أخذ س في الازدياد لكن اذا تغيرت اشارة المشتقة متى وصل س الى مقدار ما وليكن ك وزاد عنه فان الدالة ء(س) تصير نهاية كبرى بهذا المقدار اذا مرت المشتقة من الايجاب الى السلب ونهاية صغرى اذا مرت المشتقة من السلب الى الايجاب ومن المعلوم ان هذه المشتقة لا يمكن ان تتغير اشارتها الا اذا مرت بالصفر أو صارت غير مستمرة أو لانهائية ويعلم من ذلك ان مقادير س التي تجعل ء(س) نهاية كبرى أو نهاية صغرى هي المقادير التي بها تصير المشتقة ءَ(س) معدومة أو لانهائية أو غير مستمرة حينما تتغير اشارتها

نمرة ١٣٣ د عادة تطابق النهاية الكبرى والنهاية الصغرى الى مقادير للمتغير س بها تتغير اشارة المشتقة حينما تمر بالصفر مع بقائها محدودة ومستمرة وفي هذه الحالة يمكن بيان شروط النهاية الكبرى والنهاية الصغرى بواسطة متسلسلة تيلور وذلك لان

ء(س+ح) − ء(س) = ح ءَ(س) + م

فاذا كانت ءَ(س) غير معدومة تكون اشارة الفرق ء(س+ح) − ء(س) عين اشارة ح ءَ(س) وحينئذ تتغير اشارة هذا الفرق اذا تغيرت اشارة ح ويعلم من ذلك ان ء(س) لا تكون في هذه الحالة نهاية كبرى ولا نهاية صغرى بمقدار س الذي لا يعدم ءَ(س)

لكن اذا كانت ءَ(س) معدومة ولم تكن ءً(س) معدومة يكون

ء(س+ح) − ء(س) = (ح^٢ ÷ ١×٢) ءً(س) + م١

وحينئذ مهما كانت اشارة ح تكون اشارة الفرق ء(س+ح) − ء(س) عين اشارة ءً(س) وحينئذ اذا كانت ءً(س) موجبة بمقدار س المعتبر الذي يعدم ءَ(س) تكون ء(س) نهاية صغرى واذا كانت ءً(س) سالبة تكون ء(س) نهاية كبرى

لكن

لكن اذا كانت $\bar{s}$(س) معدومة يكون

$$د(س+ح)-د(س)=\frac{ح^{٣}}{١\times٢\times٣}\,\bar{\bar{\bar{د}}}(س)+م_{٢}$$

فاذا لم تكن $\bar{\bar{\bar{د}}}$(س) معدومة فان الفرق د(س+ح) ـ د(س) تتغير اشارته اذا تغيرت اشارة ح ولا تكون د(س) نهاية كبرى ولا نهاية صغرى

واذا كانت $\bar{\bar{\bar{د}}}$(س)=٠ يكون

$$د(س+ح)-د(س)=\frac{ح^{٤}}{١\times٢\times٣\times٤}\,د^{(٤)}(س)+م_{٣}$$

وتكون د(س) نهاية صغرى أو نهاية كبرى بحسب ماتكون $د^{(٤)}$(س) موجبة أو سالبة بمقدار س الذي يعدم $\bar{د}$(س) و $\bar{\bar{د}}$(س) و $\bar{\bar{\bar{د}}}$(س) وهلم جرا

بند ١٣٤ وعلى العموم متى كان مقدار للمتغير س عادما لبعض المشتقات المتتالية وهى $\bar{د}$(س) و $\bar{\bar{د}}$(س) و $\bar{\bar{\bar{د}}}$(س) و ... وكانت أول مشتقة غير معدومة برتبة زوجية فان الدالة د(س) تكون نهاية صغرى أو نهاية كبرى بحسب ماتكون هذه المشتقة موجبة أو سالبة

ولا توجد نهاية كبرى ولا نهاية صغرى اذا كانت أول مشتقة غير معدومة برتبة فردية وهذه القاعدة توافق القاعدة التي أعطيناها سابقا (بند ١٣٢) لانه اذا انعدمت الثلاث مشتقات الاولى مثلا يحدث بتطبيق متسلسلة تيلور على المشتقة

$$\bar{د}(س+ح)=\frac{ح^{٣}}{١\times٢\times٣}\,د^{(٤)}(س)+\bar{م}$$

ويشاهد ان $\bar{د}$(س) تتغير اشارتها اذا تغيرت اشارة ح ومن الواضح أن $\bar{د}$(س) لا تتغير اشارتها اذا تغيرت اشارة ح اذا كانت أول مشتقة غير معدومة بدرجة فردية

(تطبيقات)

بند ١٣٥ المسئلة الاولى ـ المطلوب البحث عن النهاية الصغرى للدالة $س^{س}$

فلحل هذه المسئلة نبحث عن النهاية الصغرى للوغاريتم النپيري الذي لهذه الدالة ولذلك نضع

$$\text{د}(\text{س})=\text{لو}(\text{س}^{\text{س}})=\text{س لوس}$$

فيكون $\text{د}'(\text{س})=١+\text{لوس}$ ، $\text{د}''(\text{س})=\frac{١}{\text{س}}$

فاذا وضعنا

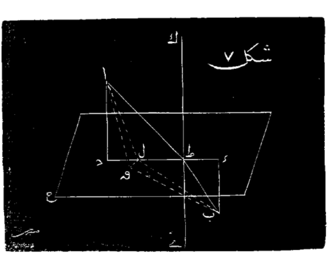
$$١+\text{لوس}=٠ \quad \text{يكون لوس}=-١ \quad \text{ويكون س}=\text{هـ}^{-١}=\frac{١}{\text{هـ}}$$

(هـ اساس نبير) ولم يبق علينا الا معرفة ان كانت $\text{د}(\frac{١}{\text{هـ}})$ أو $\frac{١}{\text{هـ}}\text{لو}(\frac{١}{\text{هـ}})$ أو $(\frac{١}{\text{هـ}})^{\frac{١}{\text{هـ}}}$ نهاية كبرى أو نهاية صغرى ولذلك نعلم أن

$$\text{د}''(\frac{١}{\text{هـ}})=\text{هـ}>٠ .$$

ويستنتج من ذلك ان للدالة $\text{س}^{\text{س}}$ نهاية صغرى تطابق للمقدار $\text{س}=\frac{١}{\text{هـ}}$

نمرة ١٣٦ المسئلة الثانية — المعلوم نقطتان ا , ب (شكل ٧) موجودتان فى وسطين مختلفين منفصلين عن بعضهما بسطح مستو وهو ع وهناك متحرك يتحرك فى الوسط الاول بسرعة منتظمة قدرها ع وفى الوسط الثانى بسرعة منتظمة قدرها عَ ويراد معرفة الطريق اطب الذى يجب أن يتممه هذا المتحرك لانتقاله من ا الى ب



فى اقصر زمن فمن الواضح أن هذا الطريق يجب أن يكون مركبا من خطين مستقيمين ولنثبت على أن الخط المنكسر الحال للمسئلة يجب أن يكون موجودا فى المستوى اب دى المار بالعمودين اد , بى على المستوى ع ولذلك نفرض أن هذا الخط هو اوب وانه يقابل المستوى ع فى نقطة و الغير الموجودة فى المستوى ادى ثم نمد ول عمودا على دى ونوصل ال , بل فحيث كان المثلثان اول , بول قائمى الزاوية فى ل فيكون ال < او , بل < بو وحينئذ يكون سير المتحرك من ا الى ب اذا اتبع الطريق الب أسرع من سيره اذا اتبع الطريق اوب

وحينئذ لنبحث فى المستوى ادى العمود على المستوى ع عن المستقيم اطب الذى يقطعه المتحرك فى أقرب وقت ممكن ولذلك نفرض ان

ا ح = ب ، ب ى = ح ، ط ى = ى ، ط ح = س

فيكون الزمن الذى يستغرقه المتحرك فى سيره من ا الى ط هو

$$\frac{ا ط}{ع} = \frac{\sqrt{ب^2 + س^2}}{ع} .$$

ويكون الزمن الذى يستغرقه فى سيره من ط الى ب هو

$$\frac{ب ط}{ع'} = \frac{\sqrt{د^2 + (ى - س)^2}}{ع'}$$

وحينئذ تكون الدالة اللازم جعلها نهاية صغرى هى

$$ى(س) = \frac{\sqrt{ب^2 + س^2}}{ع} + \frac{\sqrt{د^2 + (ى - س)^2}}{ع'}$$

وحينئذ لنضع

$$ى'(س) \quad أو \quad \frac{س}{ع\sqrt{ب^2 + س^2}} - \frac{ى - س}{ع'\sqrt{د^2 + (ى - س)^2}} = ٠$$

أو

$$\frac{س}{ع\sqrt{ب^2 + س^2}} = \frac{ى - س}{ع'\sqrt{د^2 + (ى - س)^2}}$$

فاذا أريد استخراج مقدار س من هذه المعادلة يلزم تربيع طرفيها وبذلك يتوصل الى حل معادلة بدرجة رابعة لكن حيث ان

$$\frac{س}{\sqrt{ب^2 + س^2}} = جا ح ا ط = جا ا ط ك \quad ،$$

$$\frac{ى - س}{\sqrt{د^2 + (ى - س)^2}} = جا ط ب ى = جا ب ط ى$$

فيشاهد انه فى حالة النهاية الصغرى (ومن الواضح انه ليس للدالة ى(س) نهاية كبرى) يكون

$$\frac{جا ا ط ك}{ع} = \frac{جا ب ط ى}{ع'} \quad أو \quad \frac{جا ا ط ك}{جا ب ط ى} = \frac{ع}{ع'}$$

وفى نظرية الضوء تكون الكمية $\frac{ع}{عَ}$ التى هى النسبة بين سرعتى الضوء فى الوسطين هى دليل انكسار الضوء عند مروره من الوسط الاول فى الثانى

نمرة ١٣٧ المسئلة الثالثة — المطلوب ايجاد النهاية الصغرى للدالة

$$د(س) = هـ^{س} + ٢ جتاس + هـ^{-س}$$

لاجل حل هذه المسئلة نعلم ان

$$دَ(س) = هـ^{س} - ٢ جاس - هـ^{-س} \quad ،$$

$$دً(س) = هـ^{س} - ٢ جتاس + هـ^{-س}$$

فاذا سويت المشتقة دَ(س) بصفر يكون س = ٠ وهذا المقدار اذا وضع فى الدالة د(س) يوجد ان د(٠) = ٤

ولاجل معرفة ان كان المقدار ٤ نهاية كبرى او نهاية صغرى نعوض س بالصفر فى المشتقة دً(س) وحيث دً(٠) = ٠ فيلزم استعمال مشتقات برتب اعلا وحيث ان

$$د'''(س) = هـ^{س} + ٢ جاس - هـ^{-س} \quad ، \quad د^{(٤)}(س) = هـ^{س} + ٢ جتاس + هـ^{-س}$$

فيكون

$$د'''(٠) = ٠ \quad ، \quad د^{(٤)}(٠) = ٤$$

ويعلم من ذلك ان د(٠) = ٤ نهاية صغرى للدالة د(س) المفروضة

نمرة ١٣٨ المسئلة الرابعة — المطلوب ايجاد اصغر بعد بين نقطة معلومة م احداثياها (ح ، ى) عن منحن معلوم بمعادلته وهى

$$ص = د(س) \qquad (١)$$

لذلك نوصل مك (ك نقطة حيثما اتفق من المنحنى) فيكون

$$(مك)^{٢} = (س - ح)^{٢} + (ص - ى)^{٢}$$

فاذا سويت مشتقة هذا المقدار الجبرى بصفر يحدث

$$(س - ح) + (ص - ى) \frac{فاص}{فاس} = ٠$$

وهذه المعادلة تؤل الى

$$\frac{ص - ى}{س - ح} \frac{فاص}{فاس} + ١ = ٠ \qquad (٢)$$

ويتضح

ويتضح من هذا الارتباط الواقع بين $\frac{فاص}{فاس}$ وهى المعامل الزاوى للماس للمنحنى فى النقطة المعلومة (س , ص) والكمية $\frac{ص - ى}{س - ح}$ التى هى المعامل الزاوى للمستقيم م ك ان هذين المستقيمين متعامدان على بعضهما ويعلم من ذلك انه يجب ان يكون المستقيم الذى يقاس عليه اصغر بعد قاطعا للمنحنى المعلوم على زاوية قائمة

فاذا كان البعد م ك قابلا لان يكون نهاية كبرى فانه يحصل عليها أيضا بحل المعادلتين (١) و (٢)

ولنعتبر على الخصوص الدائرة التى معادلتها

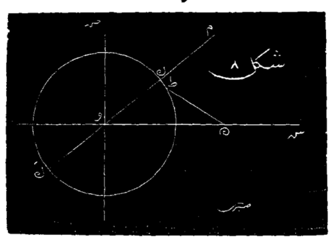
$$س^٢ + ص^٢ = ق^٢$$

فحيث ان $\frac{فاص}{فاس} = - \frac{س}{ص}$ ويئول الارتباط (٢) الى

$$١ - \frac{ص - ى}{س - ح} \frac{س}{ص} = ٠ \quad \text{أو} \quad ص = \frac{ى}{ح} س$$

فيحصل لاجل تعيين س , ص على المعادلتين

$$س^٢ + ص^٢ = ق^٢ \quad , \quad ص = \frac{ى}{ح} س$$



اللتين تدلان بأخذهما معا على نقطتى تقاطع الدائرة المعلومة بالمستقيم م و (شكل ٨) وحينئذ يكون ل م البعد الاصغر ويكون ل َ م البعد الاكبر كما يشاهد بالسهولة باعتبار المشتقات التالية وهناك حالة غريبة يمكن ايضاحها بواسطة نفس تعريف النهاية الكبرى والنهاية الصغرى وهى لنفرض ان النقطة المعلومة هى نقطة ه الموجودة على محور السينات على بعد من المركز يساوى ح فيكون مربع البعد ه ط مبينا بالمقدار الجبرى وهو

$$ص^٢ + (س - ح)^٢$$

أو بالمقدار

$$ق^٢ - ٢ ح س + ح^٢$$

ومشتقة هذا المقدار الجبرى كمية ثابتة (-٢ح) لايمكن حينئذ ان تكون مساوية للصفر ويعلم من ذلك انه ولو يوجد بعد أصغر هو ه‍ا الا انه لايمكن تحصيله بواسطة طريقتنا وهذا ناشئ من انه بموجب التعريف تكون الدالة نهاية صغرى بمقدار مّا للمتغير متى تزايدت هذه الدالة بمقادير أكبر وأصغر لهذا المتغير وهنا اذا اعتبر ه‍ط دالة للمتغير سه لايكون ه‍ا نهاية صغرى بالمعنى المتقدم حيث ان هذه الدالة الحقيقية بمقادير سه الاقل من ىو تصير تخيلية بمقادير سه الاكبر من ىو

بند ١٣٩ المسئلة الخامسة — المطلوب ايجاد النهايات الكبرى والصغرى للدالة

$$د(سه)=سه^م(ح-سه)^ه$$

لحل هذه المسئلة نأخذ مشتقة د(سه) فنجد

$$دَ(سه)=م سه^{م-١}(ح-سه)^ه-ه سه^م(ح-سه)^{ه-١}$$

$$=سه^{م-١}(ح-سه)^{ه-١}(م ح-م سه-ه سه)$$

وحينئذ يلزم ان يوضع

$$سه^{م-١}(ح-سه)^{ه-١}\left[م ح-(م+ه)سه\right]=٠$$

ومن هذه المعادلة توجد هذه الثلاثة مقادير وهى

$$سه=\frac{م ح}{م+ه}\ ,\ سه=ح\ ,\ سه=٠$$

فالمقدار الاول يقابله نهاية كبرى لانه من الواضح ان المشتقة تمر من الايجاب الى السلب متى زاد سه عن المقدار $\frac{م ح}{م+ه}$

واذا كان م زوجيا فانه يقابل للمقدار . نهاية صغرى للدالة الا ان هذا يكون فقط فى هذه الحالة أعنى الحالة التى يكون فيها م زوجيا لانه بجميع المقادير الموجبة أو السالبة القريبة جدا من الصفر يكون عاملا المشتقة وهما $(ح-سه)^{ه-١}$ و $م ح-(م+ه)سه$ موجبين دائما بخلاف العامل $سه^{م-١}$ فانه يمر من السلب الى الايجاب حيث كان م زوجيا وحينئذ تصير الدالة نهاية صغرى فى هذه الحالة وأما

اذا

اذا كان م فرديا فأن اشارة جميع عوامل المشتقة لاتتغير ولا يكون هنالك نهاية كبرى ولا نهاية صغرى

وكذلك يشاهد أنه يكون مطابقا للمقدار ب نهاية صغرى اذا كان ن زوجيا وانه لا يكون هنالك نهاية كبرى ولا نهاية صغرى بالمقدار س = ب اذا كان ن فرديا

فى النهاية الكبرى والنهاية الصغرى للدوال الغير محلولة ذات المتغير الواحد الغير متعلق

بند ١٤٠ لنفرض أن

$$ص^٢ - ٢ م س ص + س^٢ = ح$$

معادلة معينة للمتغير ص بدلالة س فيمكن ايجاد النهايات الكبرى والنهايات الصغرى للدالة ص بدون حل هذه المعادلة لانا لو أخذنا تفاضل هذه المعادلة يحدث

$$(ص - م س) \frac{ء ص}{ء س} - م ص + س = ٠$$

ويكون

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{م ص - س}{ص - م س}$$

وحيث ان مقادير س المطابقة لنهايات كبرى أو لنهايات صغرى للدالة ص تكون محققة للارتباط

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٠$$

فيتحصل على هذه المقادير بحل هاتين المعادلتين

$$ص^٢ - ٢ م س ص + س^٢ = ح \quad و \quad س - م ص = ٠$$

بند ١٤١ ولنفرض لاجل زيادة التعميم وجود ثلاث معادلات ذات أربعة مجاهيل ولتكن هذه المعادلات الثلاث هى

$$\left.\begin{array}{ll} د(س, ص, ع, ن) = ٠ & و \\ د_١(س, ص, ع, ن) = ٠ & و \\ د_٢(س, ص, ع, ن) = ٠ & \end{array}\right\} \quad (١)$$

فيمكن اعتبار أحد المتغيرات وليكن س مثلا متغيرا غير متعلق فتكون الثلاث متغيرات الاخر دوال للمتغير المذكور فلنعتبر ں على الخصوص فلايجاد مقادير س ومقادير ص ، ع التي تجعل ں نهاية كبرى أو نهاية صغرى يلاحظ انه فى الحالة الاعتيادية للنهايات الكبرى والصغرى يكون

$$\frac{د ں}{د س} = ٠$$

وبناء على هذا اذا أخذ تفاضل المعادلات (١) باعتبار أن ص ، ع ، ں دوال للمتغير س وحذفت الحدود التى يدخل فيها $\frac{د ں}{د س}$ يحدث

$$\left.\begin{aligned} \frac{د ى}{د س} + \frac{د ى}{د ص}\cdot\frac{د ص}{د س} + \frac{د ى}{د ع}\cdot\frac{د ع}{د س} &= ٠ \quad ، \\ \frac{د ى_١}{د س} + \frac{د ى_١}{د ص}\cdot\frac{د ص}{د س} + \frac{د ى_١}{د ع}\cdot\frac{د ع}{د س} &= ٠ \quad ، \\ \frac{د ى_٢}{د س} + \frac{د ى_٢}{د ص}\cdot\frac{د ص}{د س} + \frac{د ى_٢}{د ع}\cdot\frac{د ع}{د س} &= ٠ \end{aligned}\right\} \quad (٢)$$

فاذا حذف $\frac{د ص}{د س}$ ، $\frac{د ع}{د س}$ تحصل معادلة مثل

$$ى_٣ (س ، ص ، ع ، ں) = ٠ \qquad (٣)$$

اذا أخذت مع المعادلات (١) تحدث مجموعة بها تتعين مقادير س ، ص ، ع ، ں

واذا أخذ تفاضل المعادلات (١) مرة ثانية تحصل $\frac{د^٢ ں}{د س^٢}$ فيوضع فيها المقادير التى وجدت للمتغيرات س ، ص ، ع ، ں وبحسب ما تكون $\frac{د^٢ ں}{د س^٢}$ موجبة أو سالبة تكون ں نهاية صغرى أو نهاية كبرى

ويمكن اجراء حذف $\frac{د ص}{د س}$ ، $\frac{د ع}{د س}$ من المعادلات (٢) بجمع هذه المعادلات على بعضها من بعد ضربها بالتناظر فى ١ ، ل ، ے وانتخاب ل ، ے بحيث يكون معاملا $\frac{د ص}{د س}$ ، $\frac{د ع}{د س}$ فى المعادلة الناتجة معدومين وحينئذ تعوض المعادلات (٢) بهذه

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\,\text{د}}{d\,\text{س}} + \text{ل}\,\frac{d\,\text{د}_1}{d\,\text{س}} + \text{ح}\,\frac{d\,\text{د}_2}{d\,\text{س}} = 0 \quad \text{و} \\
&\frac{d\,\text{ص}}{d\,\text{ص}} + \text{ل}\,\frac{d\,\text{د}_1}{d\,\text{ص}} + \text{ح}\,\frac{d\,\text{د}_2}{d\,\text{ص}} = 0 \quad \text{و} \\
&\frac{d\,\text{د}}{d\,\text{ع}} + \text{ل}\,\frac{d\,\text{د}_1}{d\,\text{ع}} + \text{ح}\,\frac{d\,\text{د}_2}{d\,\text{ع}} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (٤)$$

وحذف ل ، ح يوصل أحيانا الى المعادلة (٣) بأسرع من حذف $\frac{d\,\text{ص}}{d\,\text{س}}$ ، $\frac{d\,\text{ع}}{d\,\text{س}}$ من المعادلات (٢)

ن ١٤٢ د يمكن أن يحتاج الى تعيين النهايات الكبرى والنهايات الصغرى لدالة محلولة ولتكن د_3 (س ، ص ، ع ، ن) فيها س ، ص ، ع ، ن متغيرات مرتبطة ببعضها بالمعادلات

$$\left.\begin{aligned}
&\text{د}\,(\text{س}\,،\,\text{ص}\,،\,\text{ع}\,،\,\text{ن}) = 0 \quad \text{و} \\
&\text{د}_1\,(\text{س}\,،\,\text{ص}\,،\,\text{ع}\,،\,\text{ن}) = 0 \quad \text{و} \\
&\text{د}_2\,(\text{س}\,،\,\text{ص}\,،\,\text{ع}\,،\,\text{ن}) = 0
\end{aligned}\right\}$$

واحد المتغيرات وليكن س مثلا يمكن اعتباره غير متعلق فتكون ص ، ع ، ن ، د_3 (س ، ص ، ع ، ن) دوال لهذا المتغير وهو س

فلاجل حل هذه المسئلة الجديدة يكفي التنبيه الى أنها حالة خصوصية من المسئلة السابقة وهي التي لاتدخل الدالة الغير محلولة التي يبحث عن نهاياتها الكبرى والصغرى الا في معادلة واحدة من المعادلات (١)

في النهاية الكبرى والنهاية الصغرى للدوال ذات العدة متغيرات الغير متعلقة

ن ١٤٣ د يقال أن المقدار الخصوصي الحقيقي لدالة ذات عدة متغيرات غير متعلقة ولتكن د (س ، ص ، ع) نهاية كبرى متى كان هذا المقدار أكبر من جميع مقادير الدالة القريبة منه أعني التي تحصل باعطاء المتغيرات مقادير مخالفة يسيرا للمقادير المعتبرة ويسمى نهاية صغرى لهذه الدالة المقدار الخصوص الاقل من جميع المقادير القريبة منه ويؤخذ من هذا التعريف أن الفرق

$$د(س+ح ، ص+ك ، ع+ل) - د(س ، ص ، ع)$$

يكون سالبا بالمقادير الصغيرة بقدر ما يراد للزيادات ح ، ك ، ل متى كان مقدار د(س ، ص ، ع) نهاية كبرى وذلك مهما كانت اشارات ح ، ك ، ل وبالعكس أى ان هذا الفرق يكون موجبا متى كانت د(س ، ص ، ع) نهاية صغرى

فلنفرض أن الدالة $ن = د(س ، ص ، ع)$ تكون نهاية كبرى أو نهاية صغرى متى كان $س = س_١ ، ص = ص_١ ، ع = ع_١$ فاذا عوض ص ، ع فى هذه الدالة بالمقدارين الثابتين $ص_١ ، ع_١$ ولم يتغير سوى س فانها تكون كذلك نهاية كبرى أو صغرى متى كان $س = س_١$ ويعلم من ذلك انه يلزم أن تكون $\frac{ك ن}{ك س}$ معدومة أو لانهائية أو غير مستمرة متى كان $س = س_١ ، ص = ص_١ ، ع = ع_١$ ومثل ذلك يقال على $\frac{ك ن}{ك ص}$ ، $\frac{ك ن}{ك ع}$

وحينئذ تكون مقادير س ، ص ، ع التى تجعل ن نهاية كبرى أو نهاية صغرى موجودة ضمن المقادير التى تعدم المشتقات $\frac{ك ن}{ك س}$ ، $\frac{ك ن}{ك ص}$ ، $\frac{ك ن}{ك ع}$ أو تجعلها لانهائية أو غير مستمرة

١٤٤ــ اذا اقتصرنا على الحالة التى تكون فيها هذه المشتقات مستمرة يمكن بمساعدة متسلسلة تيلور تمييز حلول المجموعة

$$\frac{ك ن}{ك س} = ٠ ، \frac{ك ن}{ك ص} = ٠ ، \frac{ك ن}{ك ع} = ٠ ،$$

التى تطابق النهايات كبرى أو النهايات صغرى

لان ف ن أو

$$د(س+ح ، ص+ك ، ع+ل) - د(س ، ص ، ع) = \frac{ك ن}{ك س} ح + \frac{ك ن}{ك ص} ك + \frac{ك ن}{ك ع} ل + ر$$

ومن المعلوم انه يمكن أخذ ح ، ك ، ل صغيرة بحيث يزيد مجموع المقادير المطلقة للحدود التى تشتمل على ح ، ك ، ل بدرجة واحدة عن الباقى المطابق ر وغير ذلك فانه فى المسئلة المشتغلين بها يجب اعتبار ح ، ك ، ل كميات يمكن أن تصير أصغر من كل كمية معلومة وأنها ذات اشارات حيثما اتفق ويعلم من ذلك أولا أن ف ن يجب أن يكون اشارته عين اشارة

$$\frac{ك ن}{ك س} ح + \frac{ك ن}{ك ص} ك + \frac{ك ن}{ك ع} ل$$

وثانيا اذا لم يكن

$$\frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{س}} = 0 \,،\, \frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{ص}} = 0 \,،\, \frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{ع}} = 0$$

فى آن واحد لا يمكن أن تكون د (س و ص و ع) نهاية كبرى ولا نهاية صغرى حيث انه بتغيير اشارات ح و ك و ل فقط بدون تغيير مقاديرها تتغير اشارة $\frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{س}}\text{ح} + \frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{ص}}\text{ك} + \frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{ع}}\text{ل}$ وبالتبعية له تتغير اشارة ف ى وبذلك نتوصل الى الشروط السابقة المذكورة فى بند ١٤٣

بند ١٤٥ ولنبحث الآن عن الشروط اللازمة والكافية لاجل ان تكون د (س و ص و ع) نهاية صغرى أو نهاية كبرى فنقول

حيث كان التفاضل الكلى معدوما فيكون

$$\text{ف ى} = \frac{1}{1\times 2}\left(\text{ه}\,\text{ح}^2 + \text{ه}_1\text{ك}^2 + \text{ه}_2\text{ل}^2 + 2\text{ه}_3\text{ح ك} + 2\text{ه}_4\text{ح ل} + 2\text{ه}_5\text{ك ل}\right) + \text{ر}$$

أو $$\text{ف ى} = \frac{1}{2}\partial^2\text{ى} + \text{ر}$$

ولنفرض فى أول الامر أن المعاملات ه و ه_1 و ه_2 و ه_3 و ه_4 و ه_5 التى هى رموز للمشتقات الجزئية برتبة ثانية وهى $\frac{\partial^2 \text{ى}}{\partial \text{س}^2}$ و $\frac{\partial^2 \text{ى}}{\partial \text{ص}^2}$ و ... الخ لا تكون كلها معدومة فى آن واحد بالمقادير المعتبرة للمتغيرات س و ص و ع أعنى بالمقادير التى تنعدم بها المشتقات برتبة أولى وهى $\frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{س}}$ و $\frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{ص}}$ و $\frac{\partial \text{ى}}{\partial \text{ع}}$

فاذا لم يكن $\partial^2\text{ى}$ معدوما يمكن أن تحصل احدى ثلاث حالات الاولى ان $\partial^2\text{ى}$ يمكن أن تتغير اشارته فاذ ذاك لا تكون هناك نهاية كبرى ولا نهاية صغرى والثانية ان يكون $\partial^2\text{ى}$ حافظا الاشارة واحدة دائما فى هذه الحالة تكون ى نهاية كبرى أو نهاية صغرى بحسب ما يكون $\partial^2\text{ى}$ سالبا أو موجبا والثالثة ان يكون $\partial^2\text{ى}$ معدوما بمقادير للزيادات ح و ك و ل الا ان ذلك يكون بدون تغير فى الاشارة فحينئذ لا يمكن ان يعلم ان كانت الدالة نهاية كبرى أو نهاية صغرى ولاجل معرفة ذلك يلزم مد تحليل ف ى زيادة عما سبق

ولنقتصر على البحث عن الشروط اللازمة والكافية لاجل أن يكون $\partial^2\text{ى}$ أو الدالة

$$\text{ه}\,\text{ح}^2 + \text{ه}_1\text{ك}^2 + \text{ه}_2\text{ل}^2 + 2\text{ه}_3\text{ح ك} + 2\text{ه}_4\text{ح ل} + 2\text{ه}_5\text{ك ل}$$

موجبــة على الدوام مهما كانت اشارات ح و ك و ل بمقادير صغيرة جدا لهذه الثلاث كميات لكن حيث كانت هذه الكمية الجبرية دالة متجانسة للكميات ح و ك و ل فيشاهد بوضعها بالصورة

$$ح^{٢}\left(ع + ع_{١}\frac{ك^{٢}}{ح^{٢}} + ع_{٢}\frac{ل^{٢}}{ح^{٢}} + ٢ع_{٣}\frac{ك}{ح} + ٢ع_{٤}\frac{ل}{ح} + ٢ع_{٥}\frac{ك}{ح}\times\frac{ل}{ح}\right)$$

انه اذا كانت موجبة بمقادير صــغيرة جدا للكميات ح و ك و ل تكون موجبة أيضا بمقادير كبيرة بقدر ما يراد لهذه المتغيرات بشرط أن لا تتغير نسبها وحينئذ يكون من اللازم والكافى ان تكون الكمية الجبرية

$$عح^{٢} + ع_{١}ك^{٢} + ع_{٢}ل^{٢} + ٢ع_{٣}حك + ٢ع_{٤}حل + ٢ع_{٥}كل$$

موجبة بجميع المقادير الحقيقية للكميات ح و ك و ل

ولنلاحظ الآن انه اذا كان أحد معاملات المربعات وليكن ع مثلا معدوما يكون معاملا الحدين اللذين يشتملان على ح وهما ع₃ و ع₄ معــدومين أيضا لانه فى هــذه الحالة يكون

$$ق^{٢}ن = عح + ط$$

وذلك بجعل

$$ع = ٢\left(ع_{٣}ك + ع_{٤}ل\right) \quad ، \quad ط = ع_{١}ك^{٢} + ع_{٢}ل^{٢} + ٢ع_{٥}كل$$

وكل من ع و ط غير متعلق بالكمية ح فاذا أعطى مقداران اختياريان للكميتين ك و ل وجعل

$$ح = -\frac{ط}{ع} + ف \quad \text{ثم جعل} \quad ح = -\frac{ط}{ع} - ف$$

يكون ناتج هذا الوضع هو ع ف فى الحالة الاولى و ـــ ع ف فى الثانية وحينئذ اذا لم تكن ع معدومة يمكن أن تتغير اشارة $ق^{٢}ن$ وبناء على ذلك تنشأ عن المتساوية ع = ٠ هاتان المتساويتان

$$ع_{٣} = ٠ \quad ، \quad ع_{٤} = ٠$$

وينتج من ذلك أن المعاملات ع و ع₁ و ع₂ لا تكون معدومة فى آن واحد لانه لو حصل ذلك

لانعدمت الدالة $ف^٢ن$ من نفسها وهو مخالف للفرض الذى فرضناه
وحينئذ لنفرض أن $ب$ مثلا غير معدوم فأقول أن $ب > ٠$ لانه لو وضع $ك = ٠ , ل = ٠$
تؤل الدالة الى الحد $ب ح^٢$ الذى يقتضى لاجل أن يكون موجبا أن يكون $ب > ٠$ وحينئذ
يعلم شرط أوّل لازم فى حالة النهاية الصغرى وهو

$$ب > ٠ \qquad (١)$$

ويمكن كتابة $ف^٢ن$ أى الدالة

$$ب ح^٢ + ب_١ ك^٢ + ب_٢ ل^٢ + ٢ ب_٣ ح ك + ٢ ب_٤ ح ل + ٢ ب_٥ ك ل$$

بالصورة

$$ب\left(ح^٢ + ٢ح \frac{ب_٣ ك + ب_٤ ل}{ب}\right) + ب_١ ك^٢ + ب_٢ ل^٢ + ٢ ب_٥ ك ل$$

وبتكميل المربع الذى حداه الاولان بين القوسين يحدث

$$ب\left(ح + \frac{ب_٣ ك + ب_٤ ل}{ب}\right)^٢ - \frac{ب_٣ ك^٢ + ٢ ب_٤ ك ل + ب_٤^٢ ل^٢}{ب} + ب_١ ك^٢ + ب_٢ ل^٢ + ٢ ب_٥ ك ل$$

$$= ب\left(ح + \frac{ب_٣ ك + ب_٤ ل}{ب}\right)^٢ + \left(ب_١ - \frac{ب_٣^٢}{ب}\right) ك^٢ + \left(ب_٢ - \frac{ب_٤^٢}{ب}\right) ل^٢$$

$$+ ٢\left(ب_٥ - \frac{ب_٣ ب_٤}{ب}\right) ك ل$$

فاذا جعل لاجل الاختصار

$$ب_١ - \frac{ب_٣^٢}{ب} = و \ , \ ب_٢ - \frac{ب_٤^٢}{ب} = و_١ \ , \ ب_٥ - \frac{ب_٣ ب_٤}{ب} = و_٢$$

يجب حينئذ انه بجميع مقادير $ح , ك , ل$ يكون

$$ب\left(ح + \frac{ب_٣ ك + ب_٤ ل}{ب}\right)^٢ + و ك^٢ + و_١ ل^٢ + ٢ و_٢ ك ل > ٠$$

فاذا لم تكن $و$ معدومة تؤل الدالة المعتبرة بالمقدار

$$ح = -\frac{ث_٣ ك + ث_٤ ل}{ث}$$

الى $و_١ ل^٢ + ٢ و_٢ ك ل$

وهذه الكمية ذات الحدين لايمكن ان تكون موجبة بجميع مقادير ل و ك الا اذا كان $و_٢ = ٠$ لكن حيث يمكن وضع $ف^٢ ق$ اذذاك بالصورة

$$ث \left(ح + \frac{ث_٣ ك + ث_٤ ل}{ث} \right)^٢ + و_١ ل^٢$$

فينعدم هذا التفاضل بالمقدار ل = ٠ مأخوذا مع مقادير أخر للكميتين ك و ح لانهاية لعددها وهى حالة خصوصية قد صرفنا النظر عنها

فليكن حينئذ و مخالفا للصفر فيجعل

$$ل = ٠ ، ح = -\frac{ث_٣}{ث} ك$$

نؤل الدالة الى $و ح^٢$ وحيث انه يجب أن يكون هذا الناتج موجبا بجميع مقادير ك فيستنتج من ذلك انه يجب أن تكون $و > ٠$ ومن هنا يعلم شرط ثان لازم فى حالة النهاية الصغرى وهو

$$و > ٠ \qquad (٢)$$

ثم انه اذا صرف النظر عن الحد الاول يمكن كتابة باقى كثيرة الحدود هكذا

$$و \left(ك^٢ + \frac{٢ و_١ ك ل}{و} \right) + و_٢ ل^٢$$

وبتكميل المربع الموجود بين القوسين يحدث

$$و \left(ك + \frac{و_١}{و} ل \right)^٢ - \frac{و_١^٢ ل^٢}{و} + و_٢ ل^٢ = و \left(ك + \frac{و_١}{و} ل \right)^٢ + و_٣ ل^٢$$

وذلك بجعل

$$و_٣ = و_٢ - \frac{و_١^٢}{و}$$

وحينئذ يمكن كتابة التفاضل الثانى $\partial^2 ن$ هكذا

$$ﮀ \left(ح + \frac{ﮀ_٣ لَ + ﮀ_٤ ل}{ﮀ} \right)^٢ + و \left(لَ + \frac{و ل}{و_١} \right)^٢ + و_٣ ل^٢$$

ويعلم كما تقدم انه يجب أن يكون

$$و_٣ > ٠ \qquad . \qquad (٣)$$

وعلى العموم تكون الثلاثة شروط

$$ﮀ > ٠ \text{ و } و > ٠ \text{ و } و_٣ > ٠$$

لازمة لاجل أن تكون د (سـ و صـ و ع) نهاية صغرى وزيادة على ذلك فان هذه الشروط كافية لانها اذا استوفت تكون الكمية

$$ﮀ \left(ح + \frac{ﮀ_٣ لَ + ﮀ_٤ ل}{ﮀ} \right)^٢ + و \left(لَ + \frac{و ل}{و_١} \right)^٢ + و_٣ ل^٢$$

أعنى $\partial^2 ن$ موجبة بجميع مقادير ح ، لَ ، ل

بـ١٤٦ـد واذا كانت الدالة د (سـ ، صـ ، ع) نهاية كبرى يلزم بنفس الادلة المتقدمة أن يكون

$$ﮀ ح^٢ + ﮀ_١ لَ^٢ + \ldots + ٢ ﮀ_٥ لَ ل < ٠$$

أو

$$- ﮀ ح^٢ - ﮀ_١ لَ^٢ - \ldots - ٢ ﮀ_٥ لَ ل > ٠$$

وذلك بجميع المقادير الحقيقية للكميات ح ، لَ و ل وحينئذ تحصل الشروط اللازمة والكافية لاجل أن تكون الدالة المفروضة نهاية كبرى بتعويض المعامل ﮀ بالكمية $-$ ﮀ والمعامل $ﮀ_١$ بالكمية $- ﮀ_١$ وهكذا فى الثلاثة شروط التى وجدت سابقا

بـ١٤٧ـد اذا تأتى انعدام المعاملات التفاضلية ﮀ ، $ﮀ_١$ ، $ﮀ_٢$ ، $ﮀ_٣$ ، $ﮀ_٤$ ، $ﮀ_٥$ كلها بمقادير سـ ، صـ ، ع المستخرجة من المعادلات

$$\frac{\partial ن}{\partial سـ} = ٠ \text{ ، } \frac{\partial ن}{\partial صـ} = ٠ \text{ ، } \frac{\partial ن}{\partial ع} = ٠$$

يشاهد بالسهولة انه يجب أن تنعدم جميع المعاملات التفاضلية التى برتبة ثالثة من نفسها الكأ لانسير زيادة عن ذلك لان الشروط التى يجب اذذاك أن تكون مستوفية بالمعاملات التفاضلية ذات الرتبة الرابعة فى حالة النهاية الكبرى أو النهاية الصغرى للدالة $\text{د}(\text{س}, \text{ص}, \text{ع})$ تصير متشعبة جدا

النهاية الكبرى والنهاية الصغرى للدوال الغير محلولة ذات العدة متغيرات الغير متعلقة

بند ١٤٨ — لنفرض المعادلات

$$\left.\begin{aligned} &\text{د}(\text{س}, \text{ص}, \text{ع}, \text{ن}, \text{و}) = ٠ \;\text{و} \\ &\text{د}_{١}(\text{س}, \text{ص}, \text{ع}, \text{ن}, \text{و}) = ٠ \;\text{و} \\ &\text{د}_{٢}(\text{س}, \text{ص}, \text{ع}, \text{ن}, \text{و}) = ٠ \end{aligned}\right\} \quad (١)$$

فاذا اعتبر متغيران وليكونا س , ص غير متعلقين تصير ع , ن , و دوال للمتغيرين س , ص معينة بهذه المعادلات فاذا أريد جعل الدالة و نهاية كبرى أو نهاية صغرى تحصل مقادير س , ص المطابقة بحل المعادلتين

$$\frac{\partial \text{و}}{\partial \text{س}} = ٠ \;,\; \frac{\partial \text{و}}{\partial \text{ص}} = ٠$$

وحينئذ يجب أن يكون

$$\frac{\partial \text{و}}{\partial \text{س}} \partial \text{س} + \frac{\partial \text{و}}{\partial \text{ص}} \partial \text{ص} = ٠$$

أعنى أن التفاضل الكلى للدالة و يجب أن يكون معدوما

فاذا أخذ تفاضل المعادلات (١) ولوحظ أن $\partial \text{و} = ٠$ يحدث

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{س}} \partial \text{س} + \frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ص}} \partial \text{ص} + \frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ع}} \partial \text{ع} + \frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ن}} \partial \text{ن} = ٠ \;\text{و} \\ &\frac{\partial \text{د}_{١}}{\partial \text{س}} \partial \text{س} + \frac{\partial \text{د}_{١}}{\partial \text{ص}} \partial \text{ص} + \frac{\partial \text{د}_{١}}{\partial \text{ع}} \partial \text{ع} + \frac{\partial \text{د}_{١}}{\partial \text{ن}} \partial \text{ن} = ٠ \;\text{و} \\ &\frac{\partial \text{د}_{٢}}{\partial \text{س}} \partial \text{س} + \frac{\partial \text{د}_{٢}}{\partial \text{ص}} \partial \text{ص} + \frac{\partial \text{د}_{٢}}{\partial \text{ع}} \partial \text{ع} + \frac{\partial \text{د}_{٢}}{\partial \text{ن}} \partial \text{ن} = ٠ \end{aligned}\right\} \quad (٢)$$

وفى هذه المعادلات δس , δص ثابتان وأما δع , δن فانهما التفاضلان الكليان للدالتين ن , ع معتبرتين دالتين للمتغيرين س , ص

فاذا حذف δع , δن من المعادلات (٢) تحصل معادلة بالصورة

$$ح \delta س + ط \delta ص = ٠$$

يجب أن تتحقق فى حالة النهاية الكبرى كما فى حالة النهاية الصغرى بمقادير س , ص المطابقة وبناء عليه حيث انه لا علاقة بين δس , δص فيجب أن يكون

$$ح = ٠ \quad , \quad ط = ٠ \qquad (٣)$$

فمعادلات (١) , (٣) تحصل مقادير س , ص , ع , ن , و المطلوبة ولاجل معرفة ان كان مقدار الدالة المناظر لهذه المقادير نهاية كبرى أو نهاية صغرى يلزم معرفة ان كان التفاضل الكلى $\delta^٢$ن حافظا على الدوام لاشارة واحدة أم لا

ـ١٤٩ـ وما ذكرناه يتضمن تعيين النهاية الكبرى والصغرى للدوال ذات العدة متغيرات الغير متعلقة المرتبطة ببعضها بمعادلات معلومة مثلا لتكن الدالة

$$و = د_٣(س , ص , ع , ن)$$

ولنفرض وجود الارتباطات

$$د_١(س , ص , ع , ن) = ٠ \quad و$$

$$د_٢(س , ص , ع , ن) = ٠$$

فيشاهد أن هذا يرجع الى تغيير د (س , ص , ع , ن , و) بالدالة د$_٣$(س , ص , ع , ن) — و فى المسئلة المتقدمة وفرض أن الدالتين د$_١$, د$_٢$ غير متعلقتين بالمتغير و

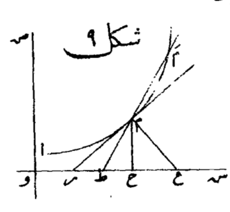
الباب الثالث

فى التطبيقات الهندسية لحساب التفاضل

الفصل الاوّل

فى مماسات ومساحج واطوال المنحنيات المستوية المنسوبة لاحداثيات مستقيمة

فى معادلتى المماس والعمودى



بند ١٥٠ لنفرض أن $د(س ، ص) = ٠$ معادلة منحن مستو وليكن ا م مَ وليكن س ، ص احداثيي نقطة حيثما اتفق م من هذا المنحنى فاذا فرض أن م ر هو المماس فى نقطة م وفرض أن المحورين قائمان يكون

$$طا م ر س = نها \frac{ف ص}{ف س} = \frac{ٯص}{ٯس}$$

وحينئذ اذا رمزنا بالرمزين $س_١$ ، $ص_١$ للاحداثيين الجاريين لنقطة حيثما اتفق من المماس تكون معادلة هذا المماس هى

$$ص_١ - ص = \frac{ٯص}{ٯس}(س_١ - س) \qquad (١)$$

واذا عوضت $\frac{ٯص}{ٯس}$ بمقدارها المستخرج من معادلة المنحنى تؤول معادلة المماس الى

$$ص_١ - ص = \frac{\frac{ٯد}{ٯس}}{\frac{ٯد}{ٯص}}(س_١ - س)$$

أو

$$\frac{ٯد}{ٯس}(س_١ - س) + \frac{ٯد}{ٯص}(ص_١ - ص) = ٠ \qquad (٢)$$

ن ١٥١ د معادلة المماس تكون بنفس الصورة المتقدمة متى كان المحوران مائلين لانه اذا فرضنا ان س، ص، احداثيا نقطة التماس م من مماس م ن للمنحنى أ م مَ تكون معادلة المماس بالصورة

شكل ١٠

$$\text{ص}_1 - \text{ص} = \text{م}(\text{س}_1 - \text{س})$$

وغير خاف أن معادلة القاطع مَ م ط هى

$$\text{ص}_1 - \text{ص} = \text{مَ}(\text{س}_1 - \text{س})$$

وأن م هو نهاية مَ متى انطبقت نقطة مَ على نقطة م

فاذا رسمنا م ع ، مَ عَ موازيين للمحور و ص ورسمنا م ك موازيا للمحور و س يحدث

$$\text{مَ} = \frac{\text{مَ ك}}{\text{م ك}}$$

لكن

$$\text{مَ ك} = \text{ف ص} \quad ، \quad \text{م ك} = \text{ف س}$$

فاذن يكون

$$\text{مَ} = \frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$$

وينتج من ذلك أن

$$\text{نها} \frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}} \quad \text{أى} \quad \text{م} = \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$$

واذن تكون المعادلة

$$\text{ص}_1 - \text{ص} = \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}(\text{س}_1 - \text{س})$$

هى فى كلتى الحالتين معادلة المماس فى النقطة (س، ص)

ن ١٥٢ د يعلم مما تقدم انه اذا كان المحوران قائمين تكون معادلة العمودى م ع هى

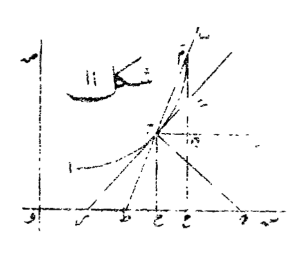
$$\text{ص}_1 - \text{ص} = - \frac{\text{ى س}}{\text{ى ص}}(\text{س}_1 - \text{س})$$

واذا كانا مائلين ومكونين بينهما زاوية قدرها و تكون معادلة هذا المستقيم هى

$$\text{ص}_1 - \text{ص} = -\frac{\text{ءس} + \text{ءص حتاو}}{\text{ءص} + \text{ءس حتاو}}\left(\text{س}_1 - \text{س}\right)$$

فى طول الخطين المسميين تحت المماس وتحت العمودى

١٥٣ - لنفرض الآن الحالة التى يكون فيها المحوران قائمين فاذا أريد معرفة تحت المماس $\text{ت}_\text{م} = \text{ح ر}$ يعلم أن



$$\text{ح ر} = \text{م ح طا ر م ح} = \text{ص}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$$

واذن يكون

$$\text{ت}_\text{م} = \frac{\text{ص ءس}}{\text{ءص}}$$

ويمكن ايجاد مقدار طول تحت المماس مباشرة باعتباره نهاية تحت القاطع أى نهاية المستقيم ط ح لان

$$\text{ط ح} = \text{م ح طا ط م ح} = \text{ص}\,\frac{\text{فس}}{\text{فص}}$$

ونهاية هذه الكمية هى $\text{ص}\,\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}}$

ولايجاد طول تحت العمودى يعلم انه من مثلث م ح ن (شكل ١١) يحدث

$$\text{ت}_\text{ع} = \frac{\text{ص ءص}}{\text{ءس}}$$

ويكون طول المماس م ر هو

$$\text{م ر} = \text{ص}\sqrt{1 + \frac{\text{ءس}^2}{\text{ءص}^2}}$$

ويكون طول العمودى م ن هو

$$م ق = ص \sqrt{١ + \frac{ء ص^٢}{ء س^٢}}$$

مثال — لنفرض المنحنى الذى معادلته

$$ص = ح^{س}$$

ونفرض لاجل ثبات الفكر أن ح > ١ فهذا المنحنى المسمى المنحنى اللوغاريتمى يمتد الى مالانهاية فى جهتى محور الصادات ويكون تقريبا المحور السينات جهة السينات السالبة

شكل ١٢

ومن المعادلة يستخرج

$$\frac{ء ص}{ء س} = ح^{س} لوَ ح$$

و لوَ ح اللوغاريتم النبيريانى للعدد ح وبناء على ذلك تكون معادلة المماس هى

$$ص_١ - صَ = ح^{س} لوَ ح (س_١ - س)$$

ويمكن رسم هذا المماس بسهولة بواسطة تحت المماس م ع لان

$$م ع = ص \frac{ء س}{ء ص} = ح^{س} \frac{ء س}{ء ص} = ح^{س} \times \frac{١}{ح^{س} لو ح}$$

أى ان

$$م ع = \frac{١}{لوَ ح} = لو هـ$$

فيعلم من ذلك أن تحت المماس كمية ثابتة تساوى لوغاريتم هـ مأخوذا فى الجملة التى أساسها ح أى تساوى مودول هذه الجملة وبالنسبة للمنحنى اللوغاريتمى الذى معادلته ص = هـ^س يكون المقدار الثابت لتحت المماس هو الوحدة

فى درجة معادلة المماس

بند ١٥٤ معادلة المماس المرسوم من النقطة (س , ص) يمكن وضعها بالصورة

$$\frac{\partial د}{\partial س} س_١ + \frac{\partial د}{\partial ص} ص_١ = \frac{\partial د}{\partial س} س + \frac{\partial د}{\partial ص} ص$$

فاذا كانت معادلة المنحنى جبرية وبدرجة م يظهر في أول الامر ان $\frac{\partial د}{\partial س} س + \frac{\partial د}{\partial ص} ص$ تكون دالة بدرجة م بالنسبة لاحداثيي نقطة التماس الا أنه يمكن بيان أن هذه الدرجة تنخفض بواحد متى لوحظت المعادلة $د(س, ص) = ٠$

ولبيان ذلك نفرض أن

$$د(س, ص) = ن + ن_١ + ن_٢ + \cdots\cdots$$

و ن مجموع الحدود التي بدرجة م و $ن_١$ مجموع مجموع الحدود التي بدرجة م — ١ وهلم جرا فيحدث

$$\frac{\partial د}{\partial س} = \frac{\partial ن}{\partial س} + \frac{\partial ن_١}{\partial س} + \frac{\partial ن_٢}{\partial س} + \cdots\cdots \quad و$$

$$\frac{\partial د}{\partial ص} = \frac{\partial ن}{\partial ص} + \frac{\partial ن_١}{\partial ص} + \frac{\partial ن_٢}{\partial ص} + \cdots\cdots$$

واذن يكون

$$\frac{\partial د}{\partial س} س + \frac{\partial د}{\partial ص} ص = س \frac{\partial ن}{\partial س} + ص \frac{\partial ن}{\partial ص}$$

$$+ \left(س \frac{\partial ن_١}{\partial س} + ص \frac{\partial ن_١}{\partial ص}\right) + \left(س \frac{\partial ن_٢}{\partial س} + ص \frac{\partial ن_٢}{\partial ص}\right) + \cdots\cdots$$

وبموجب نظرية الدوال المتجانسة تؤل هذه المعادلة الى

$$\frac{\partial د}{\partial س} س + \frac{\partial د}{\partial ص} ص = م ن + (م - ١) ن_١ + (م - ٢) ن_٢ + \cdots\cdots$$

$$= - ن_١ - ٢ ن_٢ - ٣ ن_٣ - \cdots\cdots$$

لانه حيث كانت النقطة (س, ص) على المنحنى فيكون

$$م (ن + ن_١ + ن_٢ + \cdots\cdots) = ٠$$

وبناء على ذلك تؤل معادلة المماس الى

$$\frac{ف ى}{ف س_١} س + \frac{ف ى}{ف ص_١} ص + ب_١ + ٢ ب_٢ + ٣ ب_٣ + \cdots\cdots = ٠$$

ولاتحتوى على حدود بدرجة م وهو ما أردنا اثباته

مثال — لنفرض المنحنى الذى معادلته

$$ح ص^٢ + ى س ص + هـ س^٢ + و ص + ز س + ع = ٠$$

فيكون $\frac{ف ص}{ف س} = - \frac{ى ص + ٢ هـ س + ز}{٢ ح ص + ى س + و}$

وحينئذ تكون معادلة المماس هى

$$(٢ ح ص + ى س + و)(ص_١ - ص) + (ى ص + ٢ هـ س + ز)(س_١ - س) = ٠$$

أو $(٢ ح ص + ى س + و) ص_١ + (ى ص + ٢ هـ س + ز) س_١$

$$= (٢ ح ص + ى س + و) ص + (ى ص + ٢ هـ س + ز) س$$

وبالاختصار بملاحظة معادلة المنحنى تكون المعادلة

$$(٢ ح ص + ى س + و) ص_١ + (ى ص + ٢ هـ س + ز) س_١ + و ص$$
$$+ ز س + ٢ ع = ٠$$

هى معادلة المماس فى النقطة (س , ص)

مسائل على المماسات

س ١٥٥ د اذا علم منحن وأريد رسم مماس له من نقطة خارجة احداثياها (ح , هـ) فانه يعلم أن احداثيي نقطة التماس المجهولين مرموزا اليهما بحرفى س , ص يجب أن يحققا معادلة المنحنى التى نفرضها

$$ى (س , ص) = ٠ \qquad (١)$$

وكذا يجب أن يحققا المعادلة

$$ح \frac{ف ى}{ف س} + هـ \frac{ف ى}{ف ص} = \frac{ف ى}{ف س} س + \frac{ف ى}{ف ص} ص \qquad (٢)$$

المتحصلة بوضع ح , هـ عوضا عن $س_١$, $ص_١$ فى معادلة المماس واذن يتحصل على هذين الاحداثيين بحل المعادلتين (١) و (٢)

فاذا كانت $د(س , ص)$ دالة جذرية صحيحة بدرجة م تكون المعادلة (٢) بدرجة (م ــ ١)
وحينئذ يكون للمسئلة المفروضة حلولا غايتها م (م ــ ١) فاذا فرض أن م = ٢
تكون غاية عدد المماسات اثنين وتكون هذه الغاية ستة اذا كان م = ٣
وهكذا

وباعتبار المعادلة (٢) وحدها فانها تدل على مسار هندسى يحتوى على جميع نقط التماس
ويكون هذا المسار بدرجة (م ــ ١) فى الغاية

ن ١٥٦ ـ د وقد يطلب ايجاد المماس الموازى لمستقيم معلوم معادلته $ص_١ = ل س_١$
بحيث كانت معادلة المماس المطلوب هى

$$ص_١ - ص = \frac{ء ص}{ء س}(س_١ - س)$$

فيجب أن يكون

$$\frac{ء ص}{ء س} = ل$$

وهذه المعادلة الاخيرة اذا أخذت مع المعادلة $د(س , ص) = ٠$ يتعين احداثيا نقطة
التماس وحيث أن المعادلة $\frac{ء ص}{ء س} = ل$ تؤل الى

$$- \frac{\frac{ء د}{ء س}}{\frac{ء د}{ء ص}} = ل \quad \text{أو الى} \quad \frac{ء د}{ء س} + ل \frac{ء د}{ء ص} = ٠$$

وكانت هذه المعادلة الاخيرة بدرجة (م ــ ١) اذا كانت الدالة $د(س , ص)$ بدرجة م
فيكون للمسئلة فى الغاية حلولا عددها م (م ــ ١)

فى تقعير وتحديب المنحنيات المستوية

ن ١٥٧ ـ د لنقارن الآن رأسيات منحن برأسيات مماسه بالنسبة لافقى واحد بجوار نقطة التماس
فليكن م ر مماسا للمنحنى م مَ الذى نفرض أن
معادلته $ص = د(س)$ ولنفرض أن $س = و ع$
و $ص = م ع$ هما احداثيا نقطة التماس م فبالرمز
للمسافة ع عَ بحرف ح يكون

شكل ١٣

ص م مَ هـ و ر ع عَ

$$م\acute{}ع\acute{} = د(س + ح) = د(س) + ح\,د\acute{}(س) + \frac{ح^٢}{٢}\,د\acute{}\acute{}(س + ى ح)$$

وحيث كانت معادلة المماس هى

$$ص_١ - ص = د\acute{}(س)(س_١ - س)$$

فبالنسبة للنقطة التى أفقيها $س + ح$ يكون

$$ص_١ - ص = د\acute{}(س)\,ح$$

وبناء على ذلك يكون الرأسى المطابق هو

$$ع\acute{}ن = د(س) + ح\,د\acute{}(س)$$

واذن يكون

$$م\acute{}ن = م\acute{}ع\acute{} - ن\,ع\acute{} = \frac{ح^٢}{٢}\,د\acute{}\acute{}(س + ى ح)$$

فاذا لم تكن $د\acute{}\acute{}(س)$ معدومة تكون اشارة $د\acute{}\acute{}(س + ى ح)$ عين اشارة $د\acute{}\acute{}(س)$ بسبب الاستمرار وحيث ان $ح^٢$ موجب فتكون اشارة $م\acute{}ن$ عين اشارة $د\acute{}\acute{}(س)$ مهما كانت اشارة $ح$

وحينئذ اذا كانت

$$د\acute{}\acute{}(س) \text{ أى } \frac{ى^٢ص}{ى س^٢} > ٠ \qquad (١)$$

تكون رأسيات المنحنى أكبر من رأسيات المماس بمجاورة نقطة م فى جهتى هذه النقطة واذا كان الامر بالعكس أى اذا كانت

$$\frac{ى^٢ص}{ى س^٢} < ٠ \qquad (٢)$$

تكون رأسيات المماس أكبر من رأسيات المنحنى

وفى الحالة الاولى المبينة بشكل ١٣ يكون المنحنى بجوار نقطة م موجودا فى الزاوية المنفرجة م ر س َ الواقعة بين المماس م ر ومحور السينات ويقال حينئذ ان المنحنى يدير تحديبه فى نقطة م جهة محور السينات أو انه محدب جهة هذا المحور وحينئذ تقع هذه الحالة متى تحققت المتباينة (١) مادامت زاوية المحورين لا تزيد عن ٩٠° لانه اذا كانت

هـذه الزاوية منفرجة وأكبر من الزاوية الواقعة بين المماس ومحور السينات كما في شكل ١٤ تكون رأسيات المنحنى في جهتي نقطة م أكبر من رأسيات المماس ومع ذلك فانه لا يمكن أن يقال أن المنحنى محدب جهة محور السينات

شكل ١٤

وفي الحالة الثانية الموضحة بشكل ١٥ يكون المنحنى في جهتي نقطة م موجودا في الزاوية الحادة الواقعة بين المماس مں والمحور و س ويقال حينئذ ان المنحنى مقعر في نقطة م جهة محور السينات أو انه يدير تقعيره جهة هـذا المحور الأن المتباينة (٢) لا تدل على هذه النتيجة دلالة شافية الا اذا كانت زاوية المحورين أقل من ٩٠°

شكل ١٥

وماذكرناه هو بفرض أن رأسي نقطة م موجب فان كانت هذه النقطة تحت محور السينات يشاهد بالسهولة أن المنحنى يكون محدبا أو مقعرا جهة هذا المحور بحسب ما تكون

$$\frac{د^٢ص}{د س^٢} < ٠ \quad \text{أو} \quad > ٠$$

والحاصل انه على حسب ما يكون ص و $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$ متحدين في الاشارة أو مختلفين فيها يكون المنحنى محدبا أو مقعرا في نقطة م جهة محور السينات اذا لم تكن الزاوية الواقعة بين الجزأين الموجبين للمحورين أكبر من زاوية قائمة

وفي الحالة التي تكون فيها هذه الزاوية منفرجة تغير اشارة أحد الاحداثيين فبذلك تصير زاوية الاحداثيات الموجبة حادة ويمكن تطبيق القاعدة المتقدمة

بند ١٥٨ قد فرضنا الى الآن أن $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$ تكون باشارة واحدة بالنسبة للنقط الموجودة في جهتي نقطة م والقريبة منها لكن قد يتأتى أن $\frac{د^٢ص}{د س^٢}$ تكون باشارة عين اشارة ص قبل أن يصير س مساويا للبعد و ع بقليل وباشارة مخالفة بعد أن يزيد س عن هـذا المقدار أو يحصل العكس فاذا ذلك يصير المنحنى المحدب أو المقعر على شمال نقطة م مقعرا

شكل ١٦

أو محدّبا جهة محور السينات على شمال هذه النقطة واذا لذا يقال أن للمنحنى انقلابا في نقطة م التي يقال لها نقطة انقلاب وحينئذ تحصل هذه النقط الشهيرة بالبحث عن مقادير س ، ص التي تجعل $\frac{د^{2} ص}{د س^{2}}$ معدومة أو لا نهائية وبها تتغير اشارة هذه المشتقة

تمرين

المطلوب ايجاد تحت المماس للمنحنى الذي معادلته

$$س = ه^{\frac{س - ص}{ص}}$$

الحل $$ت_{م} = \frac{س^{2}}{س - ص}$$

في تفاضل مساحة منحنٍ مستوٍ

بند ١٥٩ السطح المحصور بين منحنٍ مستوٍ مثل حـ م ورأسى ثابت حـ ا ورأسى حيثما اتفق م ع ومحور السينات و س دالة للافقى و ع = س الذى هو أفقى النقطة م حيث انه يتغير متى غيرت النقطة ع فللبحث عن تفاضل هذه الدالة نفرض أن حـ ا م ع = ن والرمز بالرمز ف ن للسطح م مَ ع عَ المطابق لزيادة صغيرة جدا ع عَ = ف س للافقى فاذا رسم المستقيمان م ى ، مَ ك موازيين للمحور و س ومدا حتى يتلاقيا مع الرأسيين م ع ، مَ عَ فحيث انه يمكن

شكل ١٧

دائما أخذ النقطة مَ قريبة قربا كافيا من نقطة م بحيث تكون الرأسيات متزائدة أو متناقصة من م الى مَ (وقد فرضناها هنا متزائدة لاجل عدم تشتت الفكر) فيكون

$$ع م مَ عَ > ع م ى عَ \quad و \quad ع م مَ عَ < ع ك مَ عَ$$

أعنى أن $$ف ن > ص ف س \quad و \quad ف ن < (ص + ف ص) ف س$$

أى ان

$$\text{ص} + \text{ف ص} > \frac{\text{ف ى}}{\text{ف س}} > \text{ص}$$

وحينئذ عند النهاية يكون

$$\frac{\text{6ى}}{\text{6س}} = \text{ص} \quad \text{أو} \quad \text{6ى} = \text{ص 6س}$$

بند ١٦٠ ولو أنه يمكن بالضرورة أن يفرض انه بأخذ النقطة م قريبة قربا كافيا من نقطة م تكون الرأسيات متزائدة أو متناقصة من م الى مَ فان هذا الفرض غير لازم ويكفى لاجل اقامة الدليل اعادة البرهان المتقدم مع تعويض ص , ص + ف ص فيه بالرمزين ص , ص١ اللذين هما أصغر وأكبر الرأسيات على التناظر فى المسافة التى يتغير فيها الافقى

بند ١٦١ طريقة البرهان المتقدمة توافق الحالة التى يكون فيها المحوران مائلين غير انه يوجد فرق واحد وهو ان الزيادة ف ى تكون حينئذ محصورة بين مساحتى متوازيى أضلاع أضلاعهما موازية للمحورين وحيث ان مساحة متوازى الاضلاع تساوى حاصل ضرب ضلعين متجاورين فى جيب الزاوية الواقعة بينهما فبالرمز بحرف و لزاوية المحورين يكون

$$\text{6ى} = \text{ص 6س حا و}$$

فى المساحات معتبرة نهايات لمجموع متوازيات أضلاع

بند ١٦٢ فى الحالة التى يكون فيها المحوران قائمين يكون السطح ا ب ح د نهاية مجموع مستطيلات داخلة متكونة من مد موازيات الى و س من النقط ح , د , هـ , ... , م , مَ الخ المأخوذة على المنحنى وينتهى كل من هذه الموازيات برأسى النقطة التالية (ويكون أحد هذه المستطيلات هو م ى حَ ح مثلا) ويفرض أن هذه النقط قريبة قربا لانهائيا من بعضها وأن عددها يزيد الى ما لانهاية

شكل ١٨

فلنفرض فى أوّل الامر ان الرأسيات تكون متزائدة على الدوام من ح الى ط وليكن س , ص احداثيى نقطة حيثما اتفق من المنحنى نفرضها م مثلا وليكن س + ف س , ص + ف ص احداثيى النقطة التالية مَ فيكون

م ـ ع َ ع = ص ف س

واذا رمزنا بالرمز مجـ (ص ف س) لمجموع كافة الحدود المشابهة للحاصل ص ف س أعنى لمجموع كافة المستطيلات الداخلة من ح ا الى ب ط فمن الواضح انه اذا جعل سطح ا ح ط ب = ن يكون

ن > مجـ (ص ف س)

فاذا مددت الآن من جميع النقط المعتبرة على المنحنى موازيات للمحور و س ومنتهية برأسيات النقط السابقة تتكون مستطيلات خارجة مشابهة للمستطيل

ع لـ م ع َ = (ص + ف ص) ف س = ص ف س + ف ص ف س

وحيث ان السطح ا ح ط ب أصغر من مجموع هذه المستطيلات فيكون

ن < مجـ (ص ف س) + مجـ (ف ص ف س)

لكن عندما نزيد عدد التقاسيم يميل ف ص الى الصفر فينتج من قاعدة أثبتناها فى بـ ١٤ ـد أن مجـ (ف ص ف س) يميل كذلك الى الصفر واذن يكون

ن = نها [مجـ (ص ف س)]

وبمثل ذلك يثبت أن ن نهاية مجموع المستطيلات الخارجة

ه يطبق البرهان نفسه متى كانت الرأسيات متناقصة على الدوام من ح الى ط وحينئذ تكون النظرية التى أثبتناها حقيقية متى تغيرت الرأسيات بكيفية حيثما اتفق لانه يمكن دائما قسمة المساحة الكلية الى أجزاء بها تكون الرأسيات آخذة على الدوام اما فى الزيادة واما فى النقص

تطبيقـان

بـ ١٦٣ ـد الاوّل ـ لتكن

$$\text{صـ}^{٢} = ٢\,\text{ح}\,\text{سـ}$$

معادلة قطع مكافى منسوب الى محوره والمماس فى رأسه

فبفرض أن سطح و م ح = ى يكون

$$\text{د ى} = \text{صـ د سـ} = \sqrt{٢\,\text{ح سـ}}\ \text{د سـ} = \sqrt{٢\,\text{ح}} \times \text{سـ}^{\frac{١}{٢}}\ \text{د سـ}$$

لكن

$$\text{سـ}^{\frac{١}{٢}}\ \text{د سـ} = \frac{٢}{٣}\ \text{د سـ}^{\frac{٣}{٢}}$$

فاذن يكون

$$\text{د ى} = \frac{٢}{٣}\sqrt{٢\,\text{ح}}\ \text{د سـ}^{\frac{٣}{٢}} = \text{د}\left(\frac{٢}{٣}\sqrt{٢\,\text{ح}}\ .\ \text{سـ}^{\frac{٣}{٢}}\right)$$

ومن هنا ينتج أن

$$\text{ى} = \frac{٢}{٣}\sqrt{٢\,\text{ح}}\ \text{سـ}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

شكل ١٩

لكن حينما يكون سـ = ٠ يجب أن يكون ى = ٠

فاذن يكون ث = ٠ ويكون

$$\text{ى} = \frac{٢}{٣}\sqrt{٢\,\text{ح سـ}} \times \text{سـ} = \frac{٢}{٣}\ \text{سـ صـ}$$

أعنى أن القطعة و م ح تساوى ثلثى المستطيل و ح م ك

وكذا من السهل تقدير السطح المحصور بين قوس م ح مَ من القطع المكافى ووتره لانه لو مد المماس ح ر موازيا للوتر م مَ ورسم من نقطة التماس ح القطر ح ى ل وفرض أن ح ى = سـ و م ى = صـ و ر ح ل = و يوجد بالطريقة المتقدمة أن

$$\text{سطح ح م ى} = \frac{٢}{٣}\ \text{سـ صـ جا و} = \frac{٢}{٣}\ \text{ح ى م ر}$$

شكل ٢٠

اذن يكون

$$\text{سطح م ح مَ} = \frac{٤}{٣}\ \text{سـ صـ جا و} = \frac{٢}{٣}\ \text{م ر ط مَ}$$

والثانى ـ لتكن سـ صـ = م^٢ معادلة قطع زائد منسوب الى خطيه التقريبيين ولنرمز بحرف ى لمساحة القطعة أ ح م ع المحصورة بين المنحنى والخط

التقربى وسـ والرأسى الثابت حا = م والرأسى المتغير مغ فيكون

ى = صـ حاو ى سـ = م٢ جاو (ىسـ / سـ) = م٢ حاو ى لوَسـ

وحينئذ لا يمكن أن يفترق ى و م٢ حاو لوَسـ عن بعضهما الا بكمية ثابتة ث واذن يكون

ى = م٢ حاو لوَسـ + ث

ولايجاد ث نجعل سـ = وا = م فيكون

ى = ٠ أو ٠ = م٢ حاو لوَم + ث

واذن يكون

ث = − م٢ حاو لوَم

وبناء عليه يكون

ى = م٢ حاو . لوَسـ − م٢ حاو . لوَم = م٢ حاو . لوَ(سـ / م)

فاذا كان م = ١ و و = ٩٠° يصير القطع الزائد قائما ويكون ى = لوَسـ أعنى ان المساحات المعتبرة تكون هى اللوغارتيمات النبيريانية للافقيات المطابقة

فى تفاضـــل قوس من منحن

بند ١٢٤ ليكن حد قوسا من منحن مستو منسوب الى محورين قائمين وسـ و وصـ ولنرسم داخل القوس حد خطا مضلعا حهومم َد عدد أضلاعه ن ولنرمز بحرف ح لمحيط هـذا الخط المضلع وبحرفى سـ و صـ لاحداثيات رأس حيثما اتفق م ونفرض ان سـ + ف سـ و صـ + ف صـ احداثيى النقطة التالية م َ فيكون

شكل ٢١

مم َ = √(م ط٢ + م َ ط٢) = √(ف سـ٢ + ف صـ٢) = ف سـ √(١ + ف صـ٢ / ف سـ٢)

وحيث ان ف صـ / ف سـ لا تفترق عن ىصـ / ىسـ الا بكمية تنعدم حينما ينعدم ف سـ فيمكن كتابة

$$م م' = ف س \left(\sqrt{١ + \frac{ف ص^٢}{ف س^٢}} + ل \right)$$

وحرف ل رمز لكمية تنعدم حينما ينعدم ف س وهذا القانون يطبق على كل ضلع من أضلاع الخط المضلع اذا أبدل فيه س و ص باحداثيات الرؤس المتتالية وحينئذ بأخذ مجموع الاضلاع التي مثل م م' يحدث

$$ع = مج \sqrt{١ + \frac{ف ص^٢}{ف س^٢}} ف س + ل ف س \qquad (١)$$

ولنفرض الآن ان ن الذى هو عدد اضلاع الخط المضلع يزيد الى مالانهاية وان كل ضلع من اضلاع هذا الخط يميل الى الصفر فحيث ان المجموع مج ف س له مقدار محدود ونابت هو الفرق اب بين أفقيي نهايتي القوس حد فبموجب بـ ١٤ د يكون

$$نها مج ل ف س = ٠ \qquad (٢)$$

وخلاف ذلك اذا جعل س متغيرا غير متعلق ورسم المنحنى الذى رأسيه ص١ معين بدلالة س بواسطة المعادلة

$$ص_١ = \sqrt{١ + \frac{ف ص^٢}{ف س^٢}}$$

وفرض ان ن ط هو جزء هذا المنحنى المحصور بين الرأسين حا و دب ورمز بحرف ن للمساحة ن ا ب ط يكون

$$نها مج ص_١ ف س = نها مج \sqrt{١ + \frac{ف ص^٢}{ف س^٢}} ف س = ن \qquad (٣)$$

وحينئذ يؤل القانون (١) بسبب المتساويتين (٢) و (٣) الى

$$نها ع = ن \qquad (٤)$$

فيعلم من ذلك أن محيط خط مضلع مرسوم داخل قوس معلوم من منحن مستو يميل الى نهاية معينة متى مالت جميع الاضلاع للصفر وغير ذلك فان هذه النهاية غير متعلقة بالناموس الذى تتناقص به اضلاع المضلع

والنهاية ن التي أثبتنا وجودها تسمى طول قوس المنحنى ح ى

فاذا رمزنا الآن بحرف ر لطول القوس حم الذى نهايته ح ثابتة ونهايته م المطابقة للافقى س متغيرة يكون ر دالة للمتغير س ومن السهل ايجاد تفاضل هذه الدالة لانه بموجب ما تقدم يكون القوس ر مساويا للمساحة ن أ ع ى المحصورة بين المنحنى ن ط ومحور السينات ورأسي النقطتين ح و م وتفاضل هذه المساحة هو ص ى س

أو $\sqrt{1 + \frac{ى ص^2}{ى س^2}}$ ى س فاذن يكون

$$ى ر = \sqrt{1 + \frac{ى ص^2}{ى س^2}}\ ى س \quad \text{أو} \quad ى ر = \sqrt{ى س^2 + ى ص^2}$$

وبمقدار ى ر هذا يمكن الدلالة بغاية البساطة على جيب وجيب تمام الزاوية التى يكونها المماس فى نقطة م مع محور السينات لاننا اذا رمزنا بحرف ے لهذه الزاوية يكون

$$\text{طا}ے = \frac{ى ص}{ى س}$$

واذن يكون

$$\text{حا}ے = \frac{ى ص}{\sqrt{ى س^2 + ى ص^2}} = \frac{ى ص}{ى ر} \quad , \quad \text{حتا}ے = \frac{ى س}{\sqrt{ى س^2 + ى ص^2}} = \frac{ى س}{ى ر}$$

فى نهاية النسبة الواقعة بين قوس ووتره

بند ١٦٥ نهاية النسبة الواقعه بين قوس حينما اتفق ووتره هى الواحد

ولاثبات ذلك نعتبر زيادة حينما اتفق للقوس حم ولتكن مم َ = ف ر فيكون

$$\frac{\text{قوس}\ مم'}{مم'} = \frac{ف ر}{\sqrt{ف س^2 + ف ص^2}} = \frac{\frac{ف ر}{ف س}}{\sqrt{1 + \left(\frac{ف ص}{ف س}\right)^2}}$$

وحتى مال ف س الى الصفر تؤل كلتا النسبتين

$$\frac{ح}{ف س} \text{ و } \sqrt{١+\left(\frac{ف ص}{ف س}\right)^٢} \text{ الى } \sqrt{١+\left(\frac{ٯ ص}{ٯ س}\right)^٢}$$

واذن يكون

$$\text{نها} \frac{\text{قوس م م}'}{\text{م م}'} = ١$$

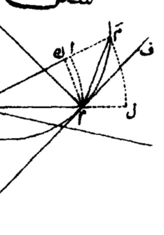
الفصـــــــل الثـانى

فى مماسات المنحنيات المستوية المنسوبة لاحداثيات قطبية

فى تعيـــــين المماس

١٦٦ ـ لاجل تعيين المماس فى نقطة م لمنحن منسوب الى احداثيات قطبية نفرض أن و القطب وان وس المحور القطبى ونفرض س و م = و ، ن = وم هما احداثيا نقطة م وان

$$ن = د(و)$$



معادلة المنحنى فالزاوية ى التى يكونها اتجاه المماس مف مأخوذا فى الجهة التى تزداد فيها و مع الاتجاه وم ممتدا تكفى لتعيين المماس

فليكن ن + ف ن ، و + ف و احداثيى نقطة مَ قريبة جدا من نقطة م ولنمد القاطع م مَ ونصف القطر و مَ ونمد م لَ عمودا على و مَ فى المثلث م لَ مَ يحدث

$$طا م مَ لَ = \frac{م لَ}{مَ لَ}$$

ونهاية الزاوية م مَ لَ هى الزاوية ى وغير ذلك فان م لَ = ن حا و = ن ف و ، مَ لَ = و مَ ـــ و لَ = و مَ ـــ و م = ف ن واذن يكون

$$طا ى = نها \frac{ن ف و}{ف ن} = ن \frac{ء و}{ء ن} \qquad (١)$$

فاذا استخرج ن ، ء ن من معادلة المنحنى بدلالة ن علم ميل المماس على نصف القطر البورى فى نقطة حيثما اتفق من المنحنى

١٦٧ د ويمكن أيضا ايجاد قانون (١) بتحويل الاحداثيات ولبيان ذلك نجعل المحور القطبى وس محورا للسينات ونجعل محور الصادات العمود المقام على وس من نقطة و فاذا فرضنا ان وح = س و مح = ص هما احداثيا نقطة م يكون

$$\text{طا و م ر} = \text{طا}(\text{م ر س} - \text{م و س})$$

لكن

$$\text{طا م ر س} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \quad \text{و} \quad \text{طا م و س} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$$

فاذن يكون

$$\text{طا و م ر} = \frac{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ص}}{\text{س}}}{1 + \frac{\text{ص ءص}}{\text{س ءس}}}$$

او

$$\text{طا و م ر} = \frac{\text{س ءص} - \text{ص ءس}}{\text{س ءس} + \text{ص ءص}}$$

لكن

$$\text{س} = \text{ب حتا و} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{ب حا و}$$

فاذن يكون

$$\text{ءس} = \text{ءب حتا و} - \text{ب ءو حا و} \quad \text{و}$$

$$\text{ءص} = \text{ءب حا و} + \text{ب ءو حتا و}$$

وحينئذ يكون

$$\text{طا و م ر} = \frac{\text{ب حتا و}(\text{ءب حا و} + \text{ب ءو حتا و}) - \text{ب حا و}(\text{ءب حتا و} - \text{ب ءو حا و})}{\text{ب حتا و}(\text{ءب حتا و} - \text{ب ءو حا و}) + \text{ب حا و}(\text{ءب حا و} + \text{ب ءو حتا و})}$$

ومن بعد الاختصار يحدث

$$\text{طا و م ر} = \frac{\text{ب}^2 \text{ءو}}{\text{ب ءب}} = \frac{\text{ب ءو}}{\text{ءب}}$$

فى طول تحت المماس وتحت العمودى

١٦٨ – فى جملة الاحداثيات هذه يكون تحت المماس هو العمود و ں شكل ٢٢ المقام على نصف القطر البورى و م من نقطة الاصل ومنته بالمماس م ں وتحت العمودى و ﻫ يقاس على هذا المستقيم بالابتداء من القطب و الى تقاطع العمودى م ﻫ فى ﻫ وبموجب هذا التعريف اذا رمزنا بالرمزين تَم و تَع لتحت المماس وتحت العمودى يكون

تَم = و ں = ﻫ ظا ى = ﻫ² ءو / ءﻫ و

تَع = و ﻫ = ﻫ / ظا ى = ءﻫ / ءو

فى تفاضل قطاع

١٦٩ – لنعتبر قطاعا ع و م شكل ٢٢ محصورا بين نصفى قطرين بوريين و ع و و م وليكن ع و م = ں و م و مَ = ف ں فيمكن أخذ القوس م مَ صغيرا بحيث انه من م الى مَ تكون انصاف الاقطار البورية متزايدة على الدوام أو متناقصة على الدوام ولاجل عدم تشتت الفكر نفرضها متزايدة ولنجعل نقطة و مركزا ونرسم قوسى الدائرة م ے و مَ ل منتهيين بنصفى القطرين البوريين و م = ﻫ و و مَ = ﻫَ فيكون

و مَ ل > ف ں > و م ے

وحيث ان

و م ے = ½ ﻫ² ف و و و مَ ل = ½ ﻫَ² ف و

فيكون

½ ﻫَ² ف و > ف ں > ½ ﻫ² ف و

أو

½ ﻫَ² > ف ں / ف و > ½ ﻫ²

وحيث انه عند النهاية يصير ﻫَ مساويا ﻫ فيكون

ءں / ءو = ½ ﻫ² أو ءں = ½ ﻫ² ءو

فى تفاضل قوس من منحن

ب ١٧٠ ــ قد يتوصل الى تفاضل القوس بتحويل الاحداثيات فان

$$\text{ء ى} = \sqrt{\text{ء س}^{٢} + \text{ء ص}^{٢}}$$

$$= \sqrt{(\text{ء ن حتا و} - \text{ن ء و حا و})^{٢} + (\text{ء ن حا و} + \text{ن ء و حتا و})^{٢}}$$

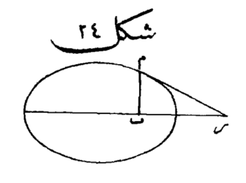
أو

$$\text{ء ى} = \sqrt{\text{ء ن}^{٢} + \text{ن}^{٢}\,\text{ء و}^{٢}}$$

تطبيقات

ب ١٧١ ــ الاول ــ من المعلوم انه اذا جعلت بورة القطع الناقص اليمنى وهى ب قطبا والمحور الاكبر محورا قطبيا تكون معادلته هى

$$\text{ن} = \frac{\text{ح}}{١ + \text{ل جتا و}}$$



ومن هنا يستخرج

$$\text{ء ن} = \frac{\text{ل ح حا و ء و}}{(١ + \text{ل جتا و})^{٢}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ء و}}{\text{ء ن}} = \frac{(١ + \text{ل حتا و})^{٢}}{\text{ل ح حا و}}$$

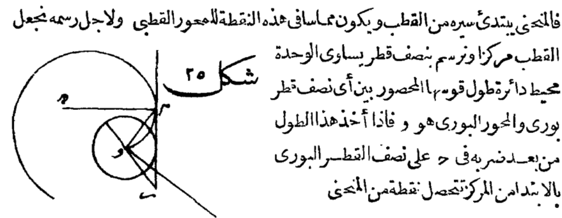
واذن يكون

$$\frac{\text{ن ء و}}{\text{ء ن}} = \text{طا ب م ى} = \frac{١ + \text{ل حتا و}}{\text{ل حا و}}$$

الثانى ــ لنعتبر حلزون ارشميدس الذى معادلته

$$\text{ن} = \text{ح و}$$

فالمنحنى يبتدئ سيره من القطب ويكون مماسا فى هذه النقطة للمحور القطبى ولاجل رسمه نجعل القطب مركزا ونرسم بنصف قطر يساوى الوحدة محيط دائرة طول قوسها المحصور بين أى نصف قطر بورى والمحور البورى هو و فاذا أخذ هذا الطول من بعد ضربه فى ح على نصف القطر البورى بالابتداء من المركز تحصل نقطة من المنحنى



وحيث أن ى يزيد الى ما لا نهاية بازدياد و فيصنع المنحنى دورات لا نهاية لعددها حول القطب
ويكون ءى = ح ءو و

$$طا\,ى = \frac{ى\,ءو}{ءى} = \frac{ى\,ءو}{ح\,ءو} = \frac{ى}{ح} = و \quad و$$

$$ت_{م} = و\,ى = ى^{2}\frac{ءو}{ءى} = ح\,و^{2} \quad و$$

$$ت_{ع} = و\,ى = \frac{ءى}{ءو} = ح$$

ويعلم من ذلك أن تحت العمودى ثابت ومن ذلك تعلم طريقة بسيطة جدا لرسم المماس

الثالث ـ لنعتبر الحلزون الزائدى (وسمى هكذا الان معادلته وهى ى و = ح تشبه لمعادلة القطع الزائدى وهى س ص = م^٢)

فمن معادلة المنحنى يستخرج ى = ح/و وحينما يكون و = ٠ يكون ى = ∞ وبالنسبة للمقادير الصغيرة جدا للمتغير و يكون ى كبيرا جدا ويتناقص بازدياد و وحينما يكون و = ∞ يكون ى = ٠ . وبناء على ذلك يصنع المنحنى دورات لا نهاية لعددها حول القطب و ولا يصل الى هذا القطب أصلا وتكون هذه النقطة نقطة تقريبية ويكون للمنحنى خطا تقريبا موازيا للمحور القطبى و ا

شكل ٢٦

لانه اذا أنزل من نقطة ما م ماخوذة على المنحنى عمودا م ع على المحور القطبى يكون

$$م\,ع = و\,م\,جا\,و = ى\,جا\,و = ح\frac{جا\,و}{و}$$

ومن هنا يفهم انه اذا مالت و الى الصفر يميل البعد م ع الى ح حيث ان نهاية $\frac{جا\,و}{و}$ هى الواحد ثم انه يكون

$$طا\,ى = \frac{ى\,ءو}{ءى} = -\frac{ى\,و^{2}}{ح} = -\,و \quad و$$

$$ت_{م} = \frac{ى^{2}\,ءو}{ءى} = -\,ى\,و = -\,ح$$

ويعلم من ذلك أن تحت المماس ثابت ومن هذه الخاصية تعلم طريقة سهلة لمد المماس من نقطة على المنحنى

الفصل الثانى

فى التماس برتب مختلفة

فى التماس برتب مختلفة للمنحنيات المستوية

بند ١٧٣ لنفرض منحنيين حمن و حَمَنَ معادلتاهما

$$\text{ص} = \text{د}(\text{س}) \quad \text{و} \quad \text{صَ} = \text{د}_1(\text{س})$$

ولنفرض ان لهذين المنحنيين فى م نقطة مشتركة ونقارن الرأسيين كن و كنَ المطابقين لافقى واحد بالقرب من نقطة م بعضهما وليكن

$$\text{وع} = \text{س} \quad \text{و} \quad \text{عك} = \text{ح} \quad \text{فيكون}$$

$$\text{كن} = \text{د}(\text{س}+\text{ح}) \quad \text{و} \quad \text{كنَ} = \text{د}_1(\text{س}+\text{ح})$$

واذن يكون

$$\text{ننَ} = \text{د}(\text{س}+\text{ح}) - \text{د}_1(\text{س}+\text{ح})$$

وبالتحليل على حسب متسلسلة تيلور يكون

$$\text{ننَ} = \text{ص} - \text{صَ} + \text{ح}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءصَ}}{\text{ءس}}\right) + \frac{\text{ح}^2}{1\times 2}\left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} - \frac{\text{ء}^2\text{صَ}}{\text{ءس}^2}\right) + \text{ر}$$

ويمكن وضع ر بالصورة $\frac{\text{ح}^2}{1\times 2}\times\text{ل}$ التى فيها ل تنعدم عندما ينعدم ح وحيث كانت نقطة م مشتركة بين المنحنيين فيكون ص = صَ ويكون

$$\text{ننَ} = \text{ح}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءصَ}}{\text{ءس}}\right) + \frac{\text{ح}^2}{1\times 2}\left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} - \frac{\text{ء}^2\text{صَ}}{\text{ءس}^2} + \text{ل}\right)$$

فاذا فرضنا الآن ان المنحنيين لهما فى م مماس مشترك وليكن مر يكون

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءصَ}}{\text{ءس}}$$ وتؤول المتساوية المتقدمة الى

$$\text{ننَ} = \frac{\text{ح}^2}{1\times 2}\left(\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2} - \frac{\text{ء}^2\text{صَ}}{\text{ءس}^2} + \text{ل}\right)$$

مما يسهل اثباته هو أن المنحنى م نَ يقرب من المنحنى م ن زيادة عن قرب أى منحن آخر مثل م نً مار بنقطة م وغير مماس للمستقيم م ر من المنحنى المذكور لانه اذا فرض ان صً = ق (س) معادلة المنحنى م نً يكون

$$\text{ن نً} = \text{ح}\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \frac{\text{د صً}}{\text{د س}} + \text{ى}\right)$$

(وحرف ى رمز لصغيرة تنعدم حينما ينعدم ح) واذن يكون

$$\frac{\text{ن نَ}}{\text{ن نً}} = \frac{\frac{\text{ح}}{١\times٢}\left(\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} - \frac{\text{د}^{٢}\text{صَ}}{\text{د س}^{٢}} + \text{ل}\right)}{\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \frac{\text{د صً}}{\text{د س}} + \text{ى}}$$

ومن هنا يعلم انه متى مال ح الى الصفر يكون

$$\text{نها}\ \frac{\text{ن نَ}}{\text{ن نً}} = ٠$$

ويتضح من هنا انه كلما اقتربنا من نقطة م كلما كان ن نَ أقل من ن نً وبناء على ذلك يكون المنحنى م نَ موجودا بين م ن و م نً

بند ١٧٣ وعلى العموم لنفرض ان

$$\text{ص} = \text{صَ}\ ,\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د صَ}}{\text{د س}}\ ,\ \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{\text{د}^{٢}\text{صَ}}{\text{د س}^{٢}}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\text{د}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{ن}}} = \frac{\text{د}^{\text{ن}}\text{صَ}}{\text{د س}^{\text{ن}}} \qquad (\text{ح})$$

فيكون

$$\text{ن نَ} = \frac{\text{ح}^{\text{ن}+١}}{١\times٢\ldots\ldots(\text{ن}+١)}\left(\frac{\text{د}^{\text{ن}+١}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{ن}+١}} - \frac{\text{د}^{\text{ن}+١}\text{صَ}}{\text{د س}^{\text{ن}+١}} + \text{ل}\right)$$

وحرف ل رمز لكمية صغيرة جدا تنعدم حينما ينعدم ح

اذا تقرر هذا أقول انه بالقرب من نقطة م يكون المنحنى م نَ الموفى للشروط (ح) أقرب للمنحنى م ن عن أى منحن آخر م نً لايوفى الشروط المذكوره

لاننا اذا فرضنا ان $\text{صـً} = \text{د}(\text{س})$ معادلة م ن ً وفرضنا ان المشتقات الاولى التى عددها م للدالة صـً مساوية للمشتقات الاولى التى عددها م للدالة صـ وفرضنا ان م أقل من ن يكون

$$\text{لـن} - \text{لـنً} = \text{ن نً} = \frac{\text{ح}^{\text{م}+1}}{1\times 2 \cdots (\text{م}+1)}\left(\frac{\text{د}^{\text{م}+1}\text{صـ}}{\text{دس}^{\text{م}+1}} - \frac{\text{د}^{\text{م}+1}\text{صـً}}{\text{دس}^{\text{م}+1}} + \text{ع}\right)$$

وحرف ع رمز لكمية تنعدم حينما تنعدم ح
وينتج من ذلك أن

$$\frac{\text{ن نً}}{\text{ن نً ً}} = \frac{\text{ح}^{\text{ن}-\text{م}}}{(\text{م}+2)(\text{م}+3)\cdots(\text{ن}+1)} \times \frac{\frac{\text{د}^{\text{ن}+1}\text{صـ}}{\text{دس}^{\text{ن}+1}} - \frac{\text{د}^{\text{ن}+1}\text{صـَ}}{\text{دس}^{\text{ن}+1}} + \text{ل}}{\frac{\text{د}^{\text{م}+1}\text{صـ}}{\text{دس}^{\text{م}+1}} - \frac{\text{د}^{\text{م}+1}\text{صـً}}{\text{دس}^{\text{م}+1}} + \text{ع}}$$

وحيث انه اذا مالت الزيادة ح الى الصغر تميل الصغيرتان الى الصفر كذلك فحينئذ تكون النسبة $\frac{\text{ن نَ}}{\text{ن نً}}$ مناسبة للكمية $\text{ح}^{\text{ن}-\text{م}}$ وبناء على ذلك يمكن أن تصير أصغر من كل كمية معلومة حيث فرض أن $\text{ن} > \text{م}$

اذا تقرر ماذكر واصطلحنا على أن نقول ان المنحنيين م نَ و م ن لهما تماس برتبة ن يكون المنحنيان م ن و م نً لهما تماس برتبة م ويمكن النطق بالنتائج التى تحصلنا عليها هكذا من نقطة مشتركة بين منحنيين لهما تماس برتبة ن لايمكن أن يمر بين هذين المنحنيين منحن آخر له مع أحد المنحنيين المفروضين تماس برتبة أقل من الرتبة النونيه

فى بيان أن رتبة التماس غير متعلقة باتجاه المحورين

بند ١٧٤ رتبة التماس غير متعلقة باتجاه المحورين بشرط أن لا يكون محور الصادات موازيا للمماس المشترك للمنحنيين

ويمكن اثبات هذه النظرية باستعمال القوانين العمومية لتحويل الاحداثيات وبيان أن مشتقات رأسي المنحنيين تكون متساوية أيضا فى جملة المحورين الجديدين لغاية المشتقة برتبة ن اذا فرض أن ن رتبة التماس فى جملة المحورين الاولين لكنه يمكن الوصول الى هذا الاثبات باعتبارات هندسيه

ولبيان ذلك نفرض أن ح م ن و حَ م نَ المنحنيان المتماسان فى نقطة م ونمد من نقطة م مستقيما حيثما اتفق وليكن $\text{م}\,\text{نً}_{١}$ انما يكون هذا المستقيم مخالفا للمماس فى نقطة م فتكون معادلته هى

شكل ٢٨

$$\text{صً} = \text{م}\,\text{س} + \text{ء}$$

ولنفرض أن

$$\text{ص} = \text{ء}(\text{س}) \quad \text{و} \quad \text{صَ} = \text{ء}_{١}(\text{س})$$

هما معادلتا المنحنيين ولنعتبر رأسيات هذه الثلاثة خطوط المطابقة لنقطة ن مأخوذة على الاول فيكون

$$\text{نَن} = \frac{\text{ح}^{\text{ن}+١}}{١\times٢\times٣\cdots(\text{ن}+١)}\left(\frac{\text{ء}^{\text{ن}+١}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}+١}} - \frac{\text{ء}^{\text{ن}+١}\text{صَ}}{\text{ءس}^{\text{ن}+١}} + \text{ل}\right)$$

وحيث اننا قد فرضنا ان المستقيم الممدود من نقطة م مخالف للمماس فيكون

$$\text{نً ن} = \text{ح}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءصً}}{\text{ءس}} + \text{ب}\right) = \text{ح}\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{ل} + \text{ب}\right)$$

واذن يكون

$$\frac{\text{نَن}}{(\text{نًن})^{\text{ن}+١}} = \frac{\frac{\text{ء}^{\text{ن}+١}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}+١}} - \frac{\text{ء}^{\text{ن}+١}\text{صَ}}{\text{ءس}^{\text{ن}+١}} + \text{ل}}{\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \text{ل} + \text{ب}\right)^{\text{ن}+١}} \times \frac{١}{١\times٢\times٣\cdots(\text{ن}+١)}$$

ففى حال ح الى الصفر تميل كلتا ل و ب الى الصفر أيضا وحينئذ يشاهد أن النسبة

$\frac{\text{نَن}}{(\text{نًن})^{\text{ن}+١}}$ تميل الى نهاية محدوده

وحينئذ يمكن أن يقال انه اذا كان التماس برتبة ن تكون النسبة $\frac{\text{نَن}}{\text{نًن}}$ صغيرة جدا برتبة ن وغير ذلك فان العكس بديهى

بند ١٧٥ لنفرض الآن اننا نسبنا المنحنى الى محورين آخرين ومددنا من نقطة ن موازيا لمحور الصادات الجديد ولتكن $ب'_1$ نقطة تقاطع هذا الموازى مع المنحنى الذى معادلته $ص' = ء_1(س)$ ولتكن $ب''_1$ نقطة تقاطعه بالمستقيم م $ب''_1$ فلاجل اثبات ان رتبة التماس لا تتغير يكفى بيان ان النسبة $\frac{ن ب'_1}{(ن ب''_1)^{ن+1}}$ تميل الى نهاية محدودة لان النسبة $\frac{ن ب'_1}{ن ب''_1}$ تكون فى هذه الحالة صغيرة برتبة ن وعليه يكون التماس برتبة ن أيضا

فاذا مد $ن' ب'_1$ يحدث من المثلث $ن ن' ب'_1$

$$\frac{ن ن'}{ن ب'_1} = \frac{جا ب'_1}{جا ن'}$$

فمتى قربت نقطة ن قربا لانهائيا من م تميل النقطة ن' الى ن كما تميل اليها نقطة $ب'_1$ وبناء على ذلك تنطبق نقطتا ن' و $ب'_1$ عند النهاية على بعضهما واذن يميل $ب'_1$ ن' الى المماس فى نقطة م واذن تكون للنسبة بين جيبى الزاويتين $ب'_1$ و ن' نهاية محدودة وحيث أن النسبة $\frac{ن ن''}{ن ب''_1}$ تبقى محدودة متى قربت نقطة ن من نقطة م اذاً أن المثلث المتغير ن $ب''_1$ ن'' يكون على الدوام مشابها لنفسه فيكون

$$ن ن' = ن ب'_1 \frac{جا ب'_1}{جا ن'} \quad ، \quad ن ن'' = ن ب''_1 \frac{جا ب''_1}{جا ن''}$$

ومن هنا يستنتج أن

$$\frac{ن ن'}{(ن ن'')^{ن+1}} = \frac{ن ب'_1}{(ن ب''_1)^{ن+1}} \times \frac{\frac{جا ب'_1}{جا ن'}}{\left(\frac{جا ب''_1}{جا ن''}\right)^{ن+1}}$$

ويستنتج من هنا ان النسبة $\frac{ن ب'_1}{(ن ب''_1)^{ن+1}}$ تميل الى نهاية محدودة وهو ما كان يلزم اثباته

فى الخواص الهندسية للتماس برتبة زوجية أو برتبة فردية

بند ١٧٦ اذا كان للمنحنيين ح م ن و ح' م ن' اللذين معادلتاهما بالتناظر هما ص = ء(س) و ص' = ء١(س) تماس فى نقطة م التى احداثياها (س و ص) برتبة ن تكون الشروط الآتية التى عددها ن + ١ مستوفية وهى

$$\text{ص}'=\text{ص} \ , \ \frac{\text{ء ص}'}{\text{ء س}}=\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} \ , \ \frac{\text{ء}^{2}\text{ص}'}{\text{ء س}^{2}}=\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} \ , \ \ldots \ , \ \frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}'}{\text{ء س}^{\text{ن}}}=\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء س}^{\text{ن}}}$$

وقد علمنا انه فى هذه الحالة يكون

$$\text{ن ن}'=\text{ل ن}-\text{ل ن}'=\frac{\text{ح}^{\text{ن}+1}}{1\times 2\cdots(\text{ن}+1)}\left(\frac{\text{ء}^{\text{ن}+1}\text{ص}}{\text{ء س}^{\text{ن}+1}}-\frac{\text{ء}^{\text{ن}+1}\text{ص}'}{\text{ء س}^{\text{ن}+1}}+\text{ل}\right)$$

لكن الى الآن لم نلتفت الا للمقدار المطلق للكمية ن ن' أى ل ن − ل ن' فلنعتبر الآن اشارة هذا الفرق وننظر ماذا يتأتى فنقول

اذا كان ن زوجيا بحيث ان ن + ١ يكون فرديا فتتغير اشارة $\text{ح}^{\text{ن}+1}$ وبالتبعية تتغير اشارة الفرق ل ن − ل ن' مع تغير اشارة ح ويستنتج من ذلك ان المنحنى الذى يكون تحت الآخر من المنحنيين على شمال نقطة التماس يكون موجودا فوقه على يمين هذه النقطة بحيث انه فيها يكون المنحنيان مخترقين بعضهما بعضا كما يشاهد فى الشكل ٢٩

شكل ٢٩

واذا كان ن فرديا يكون ن + ١ زوجيا وبأخذ ح صغيرا صغرا كافيا لا تتغير اشارة ل ن − ل ن' مع تغير اشارة ح أعنى انه بجوار نقطة م لا يخترق المنحنيان بعضهما بعضا ويعلم من ذلك انه متى كان للمنحنيين تماس برتبة فردية يكون أحد المنحنيين داخل الآخر وانه متى كان لمنحنيين تماس برتبة زوجية يكونان مخترقين بعضهما بعضا فى نقطة التماس

شكل ٣٠

فالمستقيم المماس لمنحن يكون له مع هذا المنحنى تماس برتبة أولى اعنى برتبة فردية وهو يوجد بأكمله فى جهة واحدة من المنحنى فى نقطة التماس

فاذا كانت نقطة التماس نقطة انقلاب يكون التماس برتبة زوجية ويكون المماس مخترقا للمنحنى

فى المنحنيات الالتصاقية

بند ١٧٧ لتكن المعادلة

$$ء (س و ص و ب و ح و د و ...) = ٠ \qquad (١)$$

معادلة تشتمل على ثوابت اختيارية ب و ح و د و ... عددها ن + ١ توافق بحسب المقادير المعطية لها منحنيات مختلفة لا نهاية لعددها فيمكن انتخاب هذه الكميات ب و ح و د و ... بحيث يكون للمنحنى الذى معادلته (١) مع منحن معلوم بالمعادلة

$$ص = د (س) \qquad (٢)$$

تماس فى نقطة معلومة (س و ص) برتبة معينة تكون مساوية للعدد ن فى الغاية فاذا وجب أن يكون التماس برتبة ن تكون الشروط الآتية المطابقة للافقى س مستوفية وهى

$$صَ = ص \text{ ، } \frac{ءصَ}{ءس} = \frac{ءص}{ءس} \text{ و } \frac{ء^٢صَ}{ءس^٢} = \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} \text{ و ... و } \frac{ء^نصَ}{ءس^ن} = \frac{ء^نص}{ءس^ن} \qquad (م)$$

وتحصل المشتقات $\frac{ءصَ}{ءس}$ و $\frac{ء^٢صَ}{ءس^٢}$ و .... و $\frac{ء^نصَ}{ءس^ن}$ بأخذ تفاضل المعادلة (١) مرارا متتالية عددها ن ويحصل على المشتقات $\frac{ءص}{ءس}$ و $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ و .... و $\frac{ء^نص}{ءس^ن}$ بأخذ تفاضل المعادلة (٢) مرارا متتالية عددها ن وبواسطة المعادلات (م) التى عددها ن + ١ تتعين الثوابت المجهولة التى عددها ن + ١ بدلالة احداثيى نقطة التماس ومعاملات المعادلة (٢)

ومتى عينت الثوابت ب و ح و د و ... بحيث يحصل على التماس بأعلا رتبة ممكنة وهى تساوى عدد الثوابت ناقصا واحدا يقال ان المنحنى الذى يكون مبينا بالمعادلة (١) ومطابقا للمقادير التى عينت للثوابت التصاقى للمنحنى الذى معادلته ص = د (س)

بند ١٧٨ ولتطبيق ماذكر نعتبر الخط المستقيم الذى معادلته

$$ص' = ح س' + ء \qquad (١)$$

والمنحنى الذى معادلته ص = ء(س)

فحيث ان معادلة المستقيم لاتشمل الاعلى ثابتين اختياريين فلا يمكن أن يحصل الاعلى تماس برتبة أولى ويلزم لاجل ذلك استيفاء هاتين المعادلتين وهما

$$ص' = ص \quad و \quad \frac{ء ص'}{ء س} \quad أى \quad ح = \frac{ء ص}{ء س}$$

فاذا عوض المتغير ص' بالمتغير ص فى المعادلة (١) حدث

$$ص = ح س + ء$$

ومن هنا يستخرج

$$ء = ص - ح س = ص - \frac{ء ص}{ء س} س$$

وتؤل حينئذ معادلة (١) الى

$$ص' = \frac{ء ص}{ء س} س' + ص - \frac{ء ص}{ء س} س \quad أى \quad ص' - ص = \frac{ء ص}{ء س}(س' - س)$$

وهذه المعادلة هى معادلة المماس فى النقطة (س و ص)

بند ١٧٩ ولنطبق الاعتبارات المتقدمة على الدائرة أيضا فنقول

لتكن المعادلة

$$ص = ء(س)$$

معادلة منحن منسوب الى محورين قائمين فحيث ان معادلة الدائرة تشتمل على ثلاثة ثوابت اختيارية فتكون الدائرة الالتصاقية للمنحنى المفروض هى الدائرة التى يكون لها مع هذا المنحنى تماس برتبة ثانية فلنفرض ان

$$(س - ل)^٢ + (ص' - ے)^٢ = ى^٢ \qquad (١)$$

معادلة هذه الدائرة فمنها يستخرج بأخذ تفاضلها مرتين متتاليتين

$$س - ل + (ص' - ے)\frac{ء ص'}{ء س} = ٠ \quad و \qquad (٢)$$

$$١ + \frac{ء ص'^٢}{ء س^٢} + (ص' - ے)\frac{ء ص'}{ء س^٢} = ٠ \qquad (٣)$$

وحيث انه يجب أن يكون

$$\bar{ص} = ص \quad و \quad \frac{ء\bar{ص}}{ءس} = \frac{ءص}{ءس} \quad و \quad \frac{ء^2\bar{ص}}{ءس^2} = \frac{ء^2ص}{ءس^2}$$

فبتعوض $\bar{ص}$ و $\frac{ء\bar{ص}}{ءس}$ و $\frac{ء^2\bar{ص}}{ءس^2}$ فى الارتباطات (١) و (٢) و (٣) بالمقادير

$ص$ و $\frac{ءص}{ءس}$ و $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ على التناظر تحصل ثلاث معادلات بها تتعين ل وے و ن وهى

$$(س - ل)^2 + (ص - ے)^2 = ن^2 \quad ، \qquad (٤)$$

$$(س - ل) + (ص - ے)\frac{ءص}{ءس} = ٠ \quad ، \qquad (٥)$$

$$١ + \frac{ءص^2}{ءس^2} + (ص - ے)\frac{ء^2ص}{ءس^2} = ٠ \qquad (٦)$$

و س و ص هما احداثيا نقطة التماس
ومن هذه المعادلات يستخرج

$$ے - ص = \frac{١ + \frac{ءص^2}{ءس^2}}{\frac{ء^2ص}{ءس^2}} \quad ، \quad ل - س = - \frac{\frac{ءص}{ءس}\left(١ + \frac{ءص^2}{ءس^2}\right)}{\frac{ء^2ص}{ءس^2}}$$

ويكون

$$ن^2 = \frac{\left(١ + \frac{ءص^2}{ءس^2}\right)^2}{\left(\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right)^2}\left(١ + \frac{ءص^2}{ءس^2}\right) = \frac{\left(١ + \frac{ءص^2}{ءس^2}\right)^3}{\left(\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right)^2}$$

ويكون

$$ن = \pm \frac{\left(١ + \frac{ءص^2}{ءس^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ء^2ص}{ءس^2}} \qquad (٧)$$

بند ١٨٠ حيث كان بسط هذا المقدار موجبا فيلزم استعمال اشارة + أو اشارة − بحسب ما يكون $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ > ٠ أو < ٠ اذا اريد تحصيل المقدار المطلق للكمية ى

ومن المعادلة (٦) يتضح ان ى − ص و $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$ يكونان دائما متحدين فى الاشارة

وحيث كان ى − ص هو الفرق بين رأسى مركز الدائرة ورأسى نقطة التماس فينتج من ذلك أن مركز الدائرة الالتصاقية يكون دائما فى تقعير المنحنى

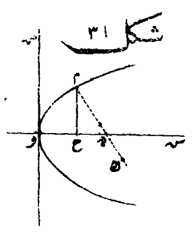
وحيث كان للمنحنى والدائرة الالتصاقية مماس واحد يكون مركز الدائرة الالتصاقية موجودا على عمودى المنحنى فى النقطة (س و ص) ويمكن أيضا استنتاج ذلك من المعادلة (٥) موضوعة بالصورة

$$\frac{ص - ى}{س - ل} \times \frac{د ص}{د س} = -١ \qquad (٨)$$

التى ينتج منها ان المستقيم الذى معادله الزاوى $\frac{ص - ى}{س - ل}$ اعنى المستقيم الواصل من نقطة التماس ومركز الدائرة الالتصاقية يكون عمودا على المماس المشترك

ولما كان للدائرة الالتصاقية مع المنحنى تماسا برتبة ثانية على العموم أى برتبة زوجية فتكون مخترقة للمنحنى الا فى بعض نقط مخصوصة يكون فيها التماس برتبة أعلى من الرتبة الثانية وفى هذه الحالة الاخيرة اذا كان التماس برتبة فردية يكون المنحنى ودائرته الالتصاقية موجودين فى جهة واحدة من المماس المشترك

وغالبا تسمى الدائرة الالتصاقية دائرة الانحناء ويسمى مركزها مركز الانحناء ويسمى نصف قطرها نصف قطر الانحناء ونرمز له من الآن فصاعدا بالرمز نح وسنشاهد فيما بعد ان شاء الله تعالى أصل هذه التسمية



بند ١٨١ مثلا لنفرض ان المقصود تحصيل نصف قطر الانحناء م ك لقطاع مخروطى فى نقطة حيثما اتفق فلذلك نفرض ان هذا المنحنى منسوب الى أحد محوريه والمماس من رأسه فتكون معادلته هى

$$ص^٢ = ٢ ع س + ل س^٢ \qquad (١)$$

فاذا أخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين يوجد

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ح} + \text{ل س}}{\text{ص}} \quad \text{،}$$

$$\text{ص} \, \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^2 = \text{ل}$$

وبتعويض $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ بمقدارها يحدث

$$\text{ص} \, \frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} + \frac{\text{ح}^2 + ٢\,\text{ح ل س} + \text{ل}^2\text{س}^2}{\text{ص}^2} = \text{ل}$$

ويكون

$$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = -\frac{\text{ح}^2}{\text{ص}^3}$$

واذن يكون المقدار المطلق لنصف قطر الانحناء نخ هو

$$\text{نخ} = \frac{\text{ص}^3 \left(1 + \frac{\text{دص}^2}{\text{دس}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\text{ح}^2} \qquad (٢)$$

وبسط نخ هو مكعب العمودى م ن لانه من المثلث القائم الزاوية م ن ح يحدث

$$\text{م ن}^2 = \text{ع}^2 = \text{ص}^2 + \text{ص}^2 \frac{\text{دص}^2}{\text{دس}^2} \quad \text{أى} \quad \text{ن} = \text{ص}\sqrt{1 + \frac{\text{دص}^2}{\text{دس}^2}}$$

(وحرف ع رمز لطول العمودى) واذن يكون

$$\text{ص}^3 \left(1 + \frac{\text{دص}^2}{\text{دس}^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \text{ع}^3$$

وحينئذ يكون

$$\text{نخ} = \frac{\text{ع}^3}{\text{ح}} \qquad (٣)$$

اعنى انه فى كل قطاع مخروطى يكون نصف قطر الانحناء مساويا مكعب العمودى مقسوما على نصف الكمية المخصصة

ومن السهل تحصيل مقدار خ بدلالة افقي النقطة م فقط لان

$$\text{ص}^{٢} = ٢\,\text{خ}\,\text{س} + \text{ل}\,\text{س}^{٢} \quad \text{و} \quad \text{ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ح} + \text{ل}\,\text{س}$$

واذن يكون

$$\text{ع}^{٣} = ٢\,\text{ح}\,\text{س} + \text{ل}\,\text{س}^{٢} + (\text{ح} + \text{ل}\,\text{س})^{٢} = (\text{ل} + \text{ل}^{٢})\,\text{س}^{٢}$$
$$+\, ٢\,\text{ح}\,\text{ل}\,\text{س} + ٢\,\text{ح}\,\text{س} + \text{ح}^{٢}$$

و يكون

$$\text{خ} = \frac{\left[(\text{ل} + \text{ل}^{٢})\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{ح}\,(١ + \text{ل})\,\text{س} + \text{ح}^{٢}\right]^{\frac{٣}{٢}}}{\text{ح}^{٢}}$$

الفصـــــــل الثـالث

فى منتشرات وغلافات المنحنيات المستوية

فى المنتشرات والانتشارات

بــ١٨٢ـد قدشاهدنا ان الاحداثيين ل و ے لمركز الانحناء المطابق لنقطة م من المنحنى حم يكونان معينين بهاتين المعادلتين

$$س - ل + (ص - ے) \frac{ءص}{ءس} = ٠ \quad و \qquad (١)$$

$$١ + \frac{ءص^٢}{ءس^٢} + (ص - ے) \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٠ \qquad (٢)$$

فمراكز الانحناء لَ و لً و ... يتشكل منها منحن جديد ف فَ يسمى منتشر المنحنى حم وهذا المنحنى الاخير يسمى انتشار ف فَ وسنرى قريبا ان شاء الله تعالى أصل هذه التسمية وحيث ان المعادلتين (١) و (٢) مع المعادلة

$$د(س و ص) = ٠ \qquad (٣)$$

التى هى معادلة المنحنى المعلوم حم تعين الاحداثيين ل و ے لمركز الانحناء لَ المطابق للنقطة المعلومة م (س و ص) من المنحنى حم فيتحصل على معادلة مسار النقط لَ بحذف س و ص من الثلاث المعادلات (١) و (٢) و (٣)

شكل ٣٢

فى الخواص العمومية للمنتشر

بــ١٨٣ـد للمنتشر خواص عمومية شهيرة نذكرها فنقول وبالله التوفيق والهدى لاقوم طريق ان أعمدة المنحنى حم تمس المنتشر فى النقط لَ و لً و .... أعنى فى مراكز الانحناء لانه اذا جعل س متغيرا غير متعلق وأخذنا تفاضل المعادلة (١) معتبرين فيها ص و $\frac{ءص}{ءس}$ و ل و ے دوال للمتغير س يكون

$$\text{دس} - \text{دل} + (\text{دص} - \text{دى})\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + (\text{ص} - \text{ى})\,\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = ٠$$

أو

$$\text{دس}\left[١ + \frac{\text{دص}^2}{\text{دس}^2} + (\text{ص} - \text{ى})\,\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right] - \text{دل} - \text{دى}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

وبملاحظة معادلة (٢) يكون

$$\text{دل} + \text{دى}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$$

ومن هنا يكون

$$\frac{\text{دى}}{\text{دل}} = -\frac{\text{دس}}{\text{دص}} \qquad (٤)$$

ومن هذا الارتباط الاخير يعلم أن المماس الممدود للمنتشر من نقطة لَ يكون عموداً على المماس الممدود للمنحنى حم من نقطة م واذن يكون المستقيم لَم مماساً للمنتشر

بند ١٨٤ ينتج مباشرة من هذه الخاصية أن منتشر منحن هو مسار التقاطعات المتتالية لاعمدة هذا المنحنى ولبيان ذلك نعتبر العمودين م لَ و م١ لَ١ اللذين يمسان المنتشر في نقطتي لَ و لَ١ ونفرض ان ى نقطة تقاطعهما فمتى قربت نقطة م١ قرباً لانهائياً من نقطة م يقرب العمودي م١ لَ١ من م لَ وتميل الزاوية لَ١ ى لَ الى قائمتين واذن يكون لَ١ لَ أكبر ضلع في المثلث لَ١ ى لَ وحيث ان هذا الضلع نهايته صفر فتكون نهاية ى لَ صفراً كذلك وبناء على ذلك تتحرك النقطة ى على المستقيم الثابت م لَ مع قربها قرباً لانهائياً من نقطة لَ التي يمكن اعتبارها نقطة تقاطع العمودي م لَ مع العمودي القريب منه قرباً لانهائياً

بند ١٨٥ الفرق بين نصفي قطري انحناء مثل م لَ و م١ لَ١ يساوي القوس لَ لَ١ المحصور بين مركزي الانحناء المطابقين لنصفي القطرين المذكورين

ولاثبات ذلك نأخذ تفاضل المعادلة

$$\text{خ}^2 = (\text{س} - \text{ل})^2 + (\text{ص} - \text{ى})^2 = ٠$$

معتبرين فيها ص و ل و ى و خ دوال للمتغير الغير المتعلق س فيحدث

$$\text{خ}\,\text{دخ} = (\text{س} - \text{ل})(\text{دس} - \text{دل}) + (\text{ص} - \text{ى})(\text{دص} - \text{دى})$$

أو
$$خ\,ءخ = ءس\left[س - ل + (ص - ى)\frac{ءص}{ءس}\right] - (س - ل)\,ءل - (ص - ى)\,ءى$$

وهذا يؤل بموجب المعادلة (١) من بند ١٨٢ الى

$$خ\,ءخ = -(س - ل)\,ءل - (ص - ى)\,ءى$$

ومن هنا يستخرج

$$\frac{ءخ}{ءو} = \frac{ل - س}{خ} \times \frac{ءل}{ءو} + \frac{ى - ص}{خ} \times \frac{ءى}{ءو}$$

(وحرف و رمز للقوس ف ك)

لكن الطرف الثانى هو جيب تمام الزاوية التى يكونها المستقيم م ك مع المماس للمنتشر فى نقطة ك وحيث ان هذه الزاوية معدومة فيكون جيب تمامها مساويا للواحد ويكون

$$ءخ = ءو$$

ومن هذه المعادلة يستنتج ان

$$خ = و + ث$$

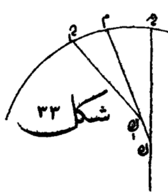
(وحرف ث رمز لكمية ثابتة) وبمثل ذلك يكون

$$خ_{١} = و_{١} + ث$$

واذن يكون

$$خ - خ_{١} = و - و_{١} = \text{قوس ف ك} - \text{قوس ف ك}_{١} = \text{قوس ك ك}_{١}$$

بند ١٨٦ ويمكن اثبات هذه الخاصية بالبناء على أن المنتشر هو مسار التقاطعات المتتالية للاعمدة على المنحنى المعلوم لاننا لو عوضنا قوسا صغيرا مثل ك ك$_{١}$ من المنتشر بوتره وفرضنا امتداد هذا الخط فانه يقطع المنحنى فى نقطة مثل م ولا يكون المستقيم ك م مخالفا للعمود ك ن الممدود من نقط ك الا اختلافا يسيرا جدا ولا يختلف ك$_{١}$ م عن العمود ك$_{١}$ ن$_{١}$ الممدود من نقطة ك$_{١}$ الا اختلافا يسيرا جدا بحيث يكون



$$ك\,ك_{١} = ك\,م - ك_{١}\,م = ك\,ن - ك_{١}\,ن_{١}$$

وخاصية المنحنى ف لَ هذه هى السبب فى تسميته بالمنتشر لانك لو تصورت أن خيطا جزءمنه ملفوف على ف لَ وجزؤه الآخر مشدود على اتجاه المماس لَ م ومنته بنقطة م على المنحنى ح م أقول انه اذا فك هذا الخيط مع شده على الدوام فان نهايته ترسم المنحنى ح م لاننا اذا فرضنا أن الجزء المستقيم متجه الآن على حسب المماس لَ م وان النهاية فى نقطة ى يكون

شكل ٣٤

ى لَ = م لَ + لَ لَ

حيث ان لَ لَ هو الجزء الذى صار مستقيما ونعلم أيضا أن م لَ = م لَ + لَ لَ فاذن يكون ى لَ = م لَ وتنطبق نقطة ى على نقطة م على المنحنى ح م وحينئذ ترسم نهاية الخيط المنحنى ح م

بند ١٨٧ يشاهد مما تقدم أن المنحنى الواحد ف لَ له انتشارات لانهاية لعددها وانه يكفى لاجل رسمها تطويل الخيط أو تنقيصه بكمية اختيارية وتكون مماسات المنحنى ف لَ اعمدة على جميع الانتشارات ويعلم من ذلك أن هذه الانتشارات تكون أعمدتها ومراكز انحنائها واحدة وحيث انها تحدد على أعمدتها المشتركة أطوالا ثابتة فيمكن بواسطة انتشار تحصيل الانتشارات الأخر

بند ١٨٨ اذا كان المنحنى جبريا تكون أنصاف اقطار دوائره الالتصاقية لها مقادير جبرية أيضا بموجب القوانين التى وجدت سابقا ويعلم من ذلك أن قوس المنتشر الذى هو الفرق بين نصفى قطرين من أنصاف الاقطار هذه يكون له فى هذه الحالة مقدار جبرى ويمكن البحث عن طول هذا المنحنى

فى نصف قطر انحناء القطع المكافئ ومنتشره

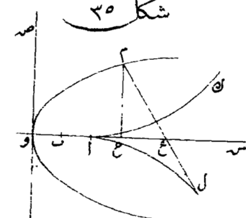
بند ١٨٩ ولنطبق ما تقدم على القطع المكافئ الذى معادلته

$$ص^٢ = ٢ ح س$$

فقد علمنا فى بند ١٨٢ أن

$$غ = \frac{ع^٣}{ح^٢}$$

فاذا اريد ايجاد نصف القطر هـذا بدلالة احـداثيي النقطة م لزم أخـذ تفاضـل المعادلة $\text{ص}^{\text{٢}} = \text{٢ ح س}$ مرتين وبذلك يحدث



شكل ٣٥

$$\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = \frac{\text{ح}}{\text{ص}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ك}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ك س}^{\text{٢}}} = -\frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٣}}}$$

واذن يكون المقدار المطلق لنصف قطر الانحناء هو

$$\text{نخ} = \frac{\left(\text{١} + \frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}}}\right)^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٣}}}} = \frac{(\text{ص}^{\text{٢}} + \text{ح}^{\text{٢}})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\text{ح}^{\text{٢}}}$$

ولاجل ايجاد معادلة المنتشر نعوّض $\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}$ و $\frac{\text{ك}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ك س}^{\text{٢}}}$ بمقداريهما فى المعادلتين

$$\text{س} - \text{ل} + (\text{ص} - \text{ے}) \frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}} = \text{٠} \quad \text{و}$$

$$\text{١} + \frac{\text{ك ص}^{\text{٢}}}{\text{ك س}^{\text{٢}}} + (\text{ص} - \text{ے}) \frac{\text{ك}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ك س}^{\text{٢}}} = \text{٠}$$

فيحدث

$$\text{س} - \text{ل} + (\text{ص} - \text{ے}) \frac{\text{ح}}{\text{ص}} = \text{٠} \quad \text{و} \quad \text{١} + \frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}}} - (\text{ص} - \text{ے}) \frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٣}}} = \text{٠}$$

وبحـذف س و ص من هاتين المعادلتين ومعادلة المنحنى يتوصل الى معادلة المنتشر فمن الثانية يستخرج

$$\text{١} + \frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}}} - \frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{ص}^{\text{٢}}} + \frac{\text{ح}^{\text{٢}}\text{ے}}{\text{ص}^{\text{٣}}} = \text{٠}$$

ومن هنا يكون

$$\text{ے} = -\frac{\text{ص}^{\text{٣}}}{\text{ح}^{\text{٢}}}$$

وبوضع مقدار ے هذا فى المعادلة الاولى يحدث

$$\text{س} - \text{ل} + \text{ح} + \frac{\text{ص}^{\text{٢}}}{\text{ح}} = \text{٠}$$

ومن هنا يكون

$$ل - ع = ٣ س$$

واذن يكون

$$ص^{٣} = - ع^{٢} ى \quad ، \quad س = \frac{١}{٣} (ل - ع) \quad ، \quad ص^{٢} = ٢ ع س$$

ومن هنا يكون

$$ص^{٦} = ع^{٤} ى^{٢} \quad ،$$

$$ص^{٦} = (٢ ع س)^{٣} = \left[\frac{٢}{٣} ع (ل - ع) \right]^{٣}$$

وحينئذ يكون

$$ع^{٤} ى^{٢} = \frac{٨}{٢٧} ع^{٣} (ل - ع)^{٣} \quad ،$$

$$ى^{٢} = \frac{٨}{٢٧ ع} (ل - ع)^{٣}$$

فاذا نقل محور الرأسيات بالتوازى لنفسه الى أن يمر بنقطة ا بحيث يكون و ا = ع فان المعادلة تأخذ أبسط صورة وهى

$$ى^{٢} = \frac{٨}{٢٧ ع} ل^{٣}$$

أو

$$ى = \pm \sqrt{\frac{٨}{٢٧ ع} ل^{\frac{٣}{٢}}}$$

وهذا المنحنى صورته هى ك ا ل (شكل ٣٥) وهو متماثل بالنسبة لمحور الافقيات وهذا ماهو واضح من أول وهلة ويمتد الى مالانهاية جهة السينات الموجبة

وبأخذ التفاضل يوجد

$$\frac{ء ى}{ء ل} = \frac{٣}{٢} \sqrt{\frac{٨}{٢٧ ع} ل^{\frac{١}{٢}}} \quad ،$$

$$\frac{ء^{٢} ى}{ء ل^{٢}} = \frac{٣}{٤} \sqrt{\frac{٨}{٢٧ ع}} \times ل^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٦ ع}} \times \frac{١}{\sqrt{ل}}$$

واشارة $\frac{d^2 ب}{d ل^2}$ عين اشارة ب وبناء على ذلك يكون المنحنى فى جميع نقطه محدبا جهة محور الافقيات

فى نصف قطر انحناء القطع الناقص ومنتشره

بند ١٩٠ لتكن المعادلة

$$ح^2 ص^2 + ء^2 س^2 = ح^2 ء^2$$

معادلة القطع الناقص منسوبا الى مركزه ومحوريه فيستخرج منها

$$\frac{d ص}{d س} = -\frac{ء^2 س}{ح^2 ص} \quad , \quad \frac{d^2 ص}{d س^2} = -\frac{ء^4}{ح^2 ص^3}$$

اذا تقرر هذا فبواسطة القانون المعلوم لنصف قطر الانحناء يكون

$$خ = \frac{\left(1 + \frac{ء^4 س^2}{ح^4 ص^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ء^4}{ح^2 ص^3}} = \frac{\left(ء^4 س^2 + ح^4 ص^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ح^4 ء^4}$$

ولاجل ايجاد منتشر القطع الناقص نأخذ المعادلتين

$$1 + \frac{d ص^2}{d س^2} + (ص - ب) \frac{d^2 ص}{d س^2} = 0 \quad , \qquad (1)$$

$$س - ل + (ص - ب) \frac{d ص}{d س} = 0 \qquad (2)$$

فمتى عوض $\frac{d ص}{d س}$ و $\frac{d^2 ص}{d س^2}$ بمقداريهما تؤول المعادلة (١) الى

$$ح^4 ص^2 + ء^4 س^2 ص - ح^2 ء^4 (ص - ب) = 0$$

أو $$ص - ى = \frac{(ح^{٤} ص^{٢} + ء^{٤} س^{٢}) ص}{ح^{٢} ء^{٤}}$$

$$= \frac{ح^{٤} ص^{٢} + ء^{٢} (ح^{٢} ء^{٢} - ح^{٢} ص^{٢})}{ح^{٢} ء^{٤}}$$

$$= \frac{(ح^{٢} - ء^{٢}) ص^{٢} + ء^{٤}}{ء^{٤}} ص$$

فاذا فرضنا أن $ح^{٢} - ء^{٢} = ف^{٢}$ يكون

$$ص - ى = \frac{(ء^{٤} + ف^{٢} ص^{٢}) ص}{ء^{٤}} = ص + \frac{ف^{٢} ص^{٣}}{ء^{٤}}$$

أو

$$ى = - \frac{ف^{٢} ص^{٣}}{ء^{٤}} \qquad (٣)$$

وبابدال الحروف س و ص و ح و ء بالحروف ص و س و ء و ح بالتناظر وملاحظة أن $ف^{٢}$ تؤل الى $- ف^{٢}$ يحدث

$$ل = \frac{ف^{٢} س^{٣}}{ح^{٤}} \qquad (٤)$$

وحينئذ اذا جعلنا $\frac{ف^{٢}}{ح} = ح_{١}$ و $\frac{ف^{٢}}{ء} = ء_{١}$ لاجل الاختصار يحدث

$$\frac{س}{ح} = \left(\frac{ل}{ح_{١}}\right)^{\frac{١}{٣}} \text{ و } \frac{ص}{ء} = - \left(\frac{ى}{ء_{١}}\right)^{\frac{١}{٣}}$$

وبوضع هذين المقدارين فى معادلة القطع الناقص موضوعة بالصورة

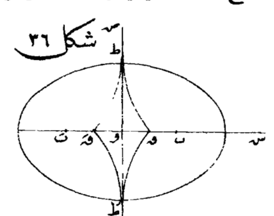
$$\left(\frac{س}{ح}\right)^{٢} + \left(\frac{ص}{ء}\right)^{٢} = ١$$

نجد معادلة المنتشر وهى

$$\left(\frac{ل}{ح_{١}}\right)^{\frac{٢}{٣}} + \left(\frac{ى}{ء_{١}}\right)^{\frac{٢}{٣}} = ١ \qquad (ب)$$

والمنحنى المبين بهذه المعادلة متماثل بالنسبة لمحورى القطع الناقص وحينما يكون ى = ٠ يكون

$$\text{ل} = \pm\, \text{ح}_{1} = \pm \frac{\text{ب}^{2}}{\text{ح}}$$



وبذلك تحصل نقطتان ن و نَ توجدان على محور السينات بين البورتين وبمثل ذلك تحصل النقطتان ط و طَ اللتان يتقابل فيهما المنتشر مع محور الصادات

وبأخذ تفاضل المعادلة (ب) مرتين متتاليتين تحدث هاتان المعادلتان

$$\left(\frac{\text{ل}}{\text{ح}_{1}}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{\text{ءل}}{\text{ح}_{1}} + \left(\frac{\text{ى}}{\text{ء}_{1}}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{\text{ءى}}{\text{ء}_{1}} = ٠ \quad \text{و}$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\text{ل}}{\text{ح}_{1}}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{\text{ءل}^{2}}{\text{ح}_{1}^{2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{\text{ى}}{\text{ء}_{1}}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{\text{ءى}^{2}}{\text{ء}_{1}^{2}} + \left(\frac{\text{ى}}{\text{ء}_{1}}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{\text{ء}^{2}\text{ى}}{\text{ء}_{1}} = ٠$$

ومنهما يحدث

$$\frac{\text{ء}^{2}\text{ى}}{\text{ءل}^{2}} = \frac{\left(\frac{\text{ى}}{\text{ح}_{1}}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{\text{ح}_{1}^{2}} + \left(\frac{\text{ى}}{\text{ء}_{1}}\right)^{-\frac{4}{3}} \frac{1}{\text{ء}_{1}^{2}} \left(\frac{\text{ءى}}{\text{ءل}}\right)^{2}}{3\left(\frac{\text{ى}}{\text{ء}_{1}}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{\text{ء}_{1}}}$$

وحيث ان اشارة $\frac{\text{ء}^{2}\text{ى}}{\text{ءل}^{2}}$ عين اشارة المقام حيث كان البسط موجبا فتكون اشارة هذه المشتقة عين اشارة ى ويعلم من ذلك أن المنحنى يكون محدبا جهة محور السينات

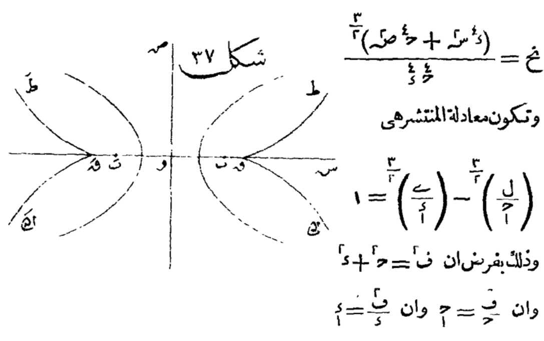
وكذا يوجدان

$$\frac{\text{ءى}}{\text{ءل}} = -\frac{\left(\frac{\text{ل}}{\text{ح}_{1}}\right)^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{\text{ى}}{\text{ء}_{1}}\right)^{-\frac{1}{3}}} \; \frac{\frac{1}{\text{ح}_{1}}}{\frac{1}{\text{ء}_{1}}} = -\left(\frac{\text{ح}_{1}\text{ى}}{\text{ء}_{1}\text{ل}}\right)^{+\frac{1}{3}} \times \frac{\text{ء}_{1}}{\text{ح}_{1}}$$

وحيث كانت هذه المشتقة معدومة بالمقدار ب = ٠ ولانهائية بالمقدار ل = ٠ فيستنتج من ذلك ان المحورين يكونان مماسين للمنحنى فى النقط ن و نَ و ط و طَ التى يجب بالنظر للتماثل أن تكون نقط رجوع

فى نصف قطر انحناء القطع الزائد ومنتشره

بند ١٩١ يمكن تحصيل نصف قطر انحناء القطع الزائد ومنتشره مما سبق بان تعوض الكمية $ء^2$ بالكمية $-ء^2$ فبذلك يكون نصف قطر الانحناء هو



$$خ = \frac{(ء^4 س^2 + ح^4 ص^2)^{\frac{3}{2}}}{ح^4 ء^4}$$

وتكون معادلة المنتشر هى

$$\left(\frac{ل}{\frac{ح}{ا}}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{ب}{\frac{ء}{ا}}\right)^{\frac{3}{2}} = ١$$

وذلك بفرض ان $ف^2 = ح^2 + ء^2$

وان $\frac{ف^2}{ح} = \frac{ح}{ا}$ وان $\frac{ف^2}{ء} = \frac{ء}{ا}$

ويتركب منتشر القطع الزائد من فرعين لانهائيين ط ن ك و طَ نَ كَ متماثلين بالنسبة للمحورين وله نقطتا رجوع ن و نَ توجدان على المحور القاطع بعد البورتين بالنسبة للمركز وهو محدب فى جميع نقطه جهة المحور القاطع

فى غلاف منحن متحرك

بند ١٩٢ متى تحرك منحن على مستو بتغيير صورته على حسب قانون ما فانه يكون على العموم مماسا دائما لمنحن ثابت يسمى غلافه فلنفرض أن المنحنى المتحرك مبين بالمعادلة

$$ء(س ، ص ، ح) = ٠ \qquad (١)$$

التى فيها ح ثابت يغير بكيفية مستمرة فاذا اعطى هذا الثابت مقدارين متتاليين ح و ح + ف ح فان المنحنيين المبينين بالمعادلتين

$$د(س و ص و ح) = ٠ و د(س و ص و ح + ف ح) = ٠$$

يتقاطعان فى نقطة (س و ص) يجب فيها أن يكون

$$د(س و ص و ح + ف ح) - د(س و ص و ح) = ٠$$

واذن يكون

$$\frac{د(س و ص و ح + ف ح) - د(س و ص و ح)}{ف ح} = ٠ \quad (٢)$$

فاذا أخذ ف ح فى النقص الى مالانهاية فان احداثيى النقطة س و ص اللذين لايزالان محققين للمعادلتين (١) و (٢) يحققان عند النهاية المعادلتين

$$د(س و ص و ح) = ٠ \quad و \quad \frac{ى د}{ى ح} = ٠ \quad (٣)$$

وحينئذ يحصل على نقطة التقاطع م للمنحنى (١) مع المنحنى القريب منه قربا لانهائيا بحل المعادلتين (٣) فاذا حذف ح من هاتين المعادلتين يحصل مسار النقط م أعنى مسار نقط التقاطع المتتالية للمنحنيات المبينة بالمعادلة (٣)

والآن أقول ان هذا المسار هو الغلاف المطلوب لان أى منحن وليكن ع من المنحنيات المبينة بالمعادلة (١) يكون مقطوعا بالمنحنى السابق له ط والمنحنى التالى له ك فى نقطتين تنتهيان بان تنطبقا على بعضهما وحينئذ يميل المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين الى أن يصير مماسا للمنحنى ع ومن الواضح كذلك انه يميل الى أن يكون مماسا لمسار نقط التقاطع المتتالية واذن يكون هذا المسار مماسا لجميع المنحنيات المبينة بالمعادلة (١)

تمـــــرينات

الاول ـ منتشر المنحنى

$$٣ ح ص^٢ = ٢ س^٣$$

هو $$٨١ ح ص^{٢} = ١٦ \left(٢ ح \pm \sqrt{ح^{٢} - ٦ ح س}\right)^{٢} \left(\pm \sqrt{ح^{٢} - ٦ ح س} - ح\right)$$

الثانى ـ منتشر المنحنى

$$س^{\frac{٢}{٣}} + ص^{\frac{٢}{٣}} = ح^{\frac{٢}{٣}}$$

هو

$$(س + ص)^{\frac{٢}{٣}} + (س - ص)^{\frac{٢}{٣}} = ٢ ح^{\frac{٢}{٣}}$$

الثالث ـ غلاف القطاعات الناقصة المتحدة المركز واتجاه محاورها واحد ومجموع محورى كل منها ثابت هو

$$س^{\frac{٢}{٣}} + ص^{\frac{٢}{٣}} = ل^{\frac{٢}{٣}}$$

الفصـــــل الرابـــع

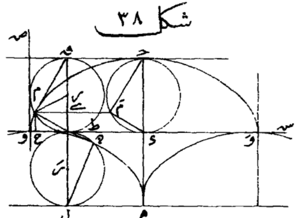
فيما يتعلق بالسـيكلويد

فى تعريف السيكلويد ومعادلته

بـ١٩٣ـد السيكلويد هو مسار أوضاع نقطة معلومة م على دائرة تتدحرج بدون زلق على مستقيم لانهائى وس

ولنجعل محور السينات هو المستقيم وس ونجعل نقطة و التى تكون موجودة فيها نقطة م فى مبدا الحركة نقطة أصل ونجعل العمود وص محور الصادات

فيعلم من أول وهلة ان الرأسى يكون فى نهايته الكبرى فى نقطة حـ الموافقة للافقى ود $=\frac{1}{2}$ محيط وم وأن المنحنى يقطع محور السينات مرة جديدة فى نقطة وَ التى افقيها هو محيط وم وان الجزء حـوَ من هذا المنحنى مماثل للجزء حـو بالنسبة الى حـد وانه بعد نقطة وَ توجد أقواس لانهاية لعددها مشابهة للقوس وحـوَ وكذا توجد مثل هذه الاقواس على شمال نقطة و



ولنبحث الآن عن معادلة السيكلويد ولذلك

نفرض ان وع = س و مع = ص هما احداثيا نقطة كنقطة م من المسار ونفرض ان مر = حـ وان مرط = ى ونوصل مر ونمد مـ عموداعلى ى ط فموجب كيفية التولد يكون القوس مط مساويا للجزء اط من المستقيم ويكون

$$س = وط - ع ط = قوس م ط - مـ = حـى - حـ حاى = حـ (ى - حاى) \quad و$$

$$ص = رط - ـر = حـ - حـ حتاى = حـ (١ - حتاى)$$

ولا يحتاج حينئذ لاجل تحصيل معادلة السيكلويد الا لحذف ى من المعادلتين

$$س = ح(ن - حا ن) \quad و \qquad (١)$$

$$ص = ح(١ - حتا ن) \qquad (٢)$$

فمن الاولى يحدث

$$حتا ن = \frac{ح - ص}{ح} \quad أو \quad ن = قوس حتا \frac{ح - ص}{ح}$$

واذن يكون

$$حا ن = \pm \frac{\sqrt{٢ ح ص - ص^٢}}{ح}$$

وبوضع هذه المقادير فى المعادلة (١) توجد معادلة السيكلويد وهى

$$س = ح قوس حتا \frac{ح - ص}{ح} \mp \sqrt{٢ ح ص - ص^٢} \qquad (٣)$$

ولاجل التعبير عن الاشارة المزدوجة للجذر أى اشارة حا ن يلاحظ انه اذا كانت نقطة م على القوس و ح يكون ن < ط و حا ن > . واذا كانت النقطة م على القوس ح و' يكون ن > ط و حا ن < . فيعلم من ذلك ان الاشارة العليا توافق القوس و ح وان الاشارة السفلى توافق القوس ح و'

في المماس والعمودى

ب ١٩٤ ـ لاجل تحصيل $\frac{ءص}{ءس}$ يمكن أخذ تفاضل المعادلة (٣) الا ان الابسط أخذ تفاضلى المعادلتين (١) و (٢) اللتين فيهما س و ص دالتان للمتغير الغير المتعلق ن فبذلك يكون

$$ءس = ح ءن (١ - حتا ن) = ص ءن \qquad و$$

$$ءص = ح ءن حا ن = ءن \sqrt{٢ ح ص - ص^٢}$$

وبالقسمة طرفا على طرف يحدث

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{\sqrt{٢ ح ص - ص^٢}}{ص}$$

وحيث كان تحت العمودى فى نقط م مقداره $\text{ص}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فيرى انه $=\sqrt{\text{٢حص}-\text{ص}^{٢}}$
وبما أن

$$\sqrt{\text{٢حص}-\text{ص}^{٢}}=\sqrt{\text{ص}(\text{٢ح}-\text{ص})}=\sqrt{\text{ب ط}\times\text{ب ن}}=\text{م ب}\ \text{أو}\ \text{ح ط}$$

فيكون م ط هو العمودى فى نقطة م ويكون م ن العمود على م ط هو المماس فى هذه النقطة ومن هنا تنتج طريقة بسيطة جدا لمد المماس للسيكلويد من نقطة م من هذا المنحنى لانه اذا رسمت الدائرة ح م َ ى على الرأسى الاكبر مجعولا قطرا لها ومد م مَ موازيا للمحور وسم من نقطة م ورسم من نقطة م موازللخط ح مَ فان هذا الموازى يكون هو المماس المطلوب

بند ١٩٥ طول العمودى فى نقطة م مقداره هو

$$\sqrt{\text{ص}^{٢}+\frac{\text{ص}^{٢}\,\text{ءص}^{٢}}{\text{ءس}^{٢}}}=\sqrt{\text{ص}^{٢}+\text{٢حص}-\text{ص}^{٢}}=\sqrt{\text{٢حص}}$$

وبما أن ن ط = ٢ ح , ب ط = ص فيكون هذا الطول وسطا متناسبا هندسيا بين ب ط , ن ط واذا فهو الخط م ط نفسه

فى نصف قطر الدائرة الالتصاقية ومركزها

بند ١٩٦ قد علمت ان

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=\frac{\sqrt{\text{٢حص}-\text{ص}^{٢}}}{\text{ص}}=\sqrt{\frac{\text{٢ح}}{\text{ص}}-١}$$

فاذا يكون

$$\frac{\text{ءص}^{٢}}{\text{ءس}^{٢}}=\frac{\text{٢ح}}{\text{ص}}-١\quad\text{ومنه}\quad ٢\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\,\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}=-٢\,\frac{\text{ح}}{\text{ص}^{٢}}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$$

أو

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}=-\frac{\text{ح}}{\text{ص}^{٢}}$$

وبوضع مقدارى $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ و $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ هذين فى القانون المعروف لنصف قطر الانحناء يوجد

$$\text{نع}^{٢} = \frac{\left(\frac{٢\text{ح}}{\text{ص}}\right)^{٣}}{\frac{\text{ح}^{٢}}{\text{ص}^{٤}}} = \frac{٨\text{ح}^{٣}\text{ص}}{\text{ح}^{٢}} \quad \text{واذا يكون} \quad \text{نع} = ٢\sqrt{٢\text{ح ص}}$$

وبما ان

$$\sqrt{٢\text{ح ص}} = \sqrt{\text{ن ط} \times \text{ى ط}} = \text{م ط}$$

فيعلم من ذلك أن نصف قطر الانحناء ضعف م ط وغير ذلك حيث كان م ط هو العمودى فى نقطة م فيتحصل على مركز الانحناء اذا أخذ على اتجاه م ط نقطة ن بحيث يكون م ن = ٢ م ط

فى منتشر السيكلويد

بند ١٩٧ هذه النتيجة يمكن بها ايجاد منتشر السيكلويد بغاية السهولة فلتكن ط ن ل دائرة مساوية للدائرة ى م ومماسة فى نقطة ط للمحور و س تحت هذا المستقيم ولنمد ل هـ موازيا للمحور و س ونمد القطر ح د الى أن يتقابل فى هـ مع ل هـ فحيث كان القوسان م ط و ن ط متساويين فيكون

$$\text{قوس ن ط} = \text{و ط}$$

وغير ذلك فان

$$\text{قوس ط ن ل} = \text{و د}$$

فاذن يكون

$$\text{قوس ن ل} = \text{و د} - \text{و ط} = \text{د ط} = \text{ل هـ}$$

ومن هنا يعلم أن منتشر السيكلويد يتولد من تحرك نقطة مثل ن موجودة على محيط الدائرة المساوية للدائرة ى م الا انها تتدحرج على مواز ل هـ للمحور و س وموجود تحت هذا المستقيم وعلى بعد منه يساوى قطر الدائرة المتحركة

واذن يكون هذا المنتشر سيكلويدا مساويا للاول

ويمكن اثبات ذلك بدون معرفة طول نصف قطر الانحناء لانه كان م ن مماس للمنحنى و م ح فى م فكذلك ى ط مماس فى ى للسيكلويد و ى هـ واذا يكون هذا المنحنى الاخير مسار التقاطعات المتتالية للعمد المتتالية للسيكلويد و ح وَ وبناء عليه يكون منتشره

ب١٩٨ د ويمكن الوصول الى ذلك بالحساب لان

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \sqrt{\frac{\text{٢ ح}}{\text{ص}} - ١} \quad , \quad \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = - \frac{\text{ح}}{\text{ص}^{٢}}$$

وبوضع هذين المقدارين فى المعادلتين

$$١ + \frac{\text{د ص}^{٢}}{\text{د س}^{٢}} + (\text{ص} - \text{ے}) \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = ٠ \quad \text{و}$$

$$\text{س} - \text{ل} + (\text{ص} - \text{ے}) \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٠$$

تؤول المعادلة الاولى منهما الى

$$\frac{\text{٢ ح}}{\text{ص}} - (\text{ص} - \text{ے}) \frac{\text{ح}}{\text{ص}^{٢}} = ٠$$

أو

$$\text{٢ ح ص} - \text{ح} (\text{ص} - \text{ے}) = ٠$$

أو

$$\text{ص} = - \text{ے} \qquad (١)$$

وتؤول الثانية الى

$$\text{س} - \text{ل} + (\text{ص} - \text{ے}) \sqrt{\frac{\text{٢ ح}}{\text{ص}} - ١} = ٠$$

وبتعويض ص بمقداره يستخرج

$$\text{س} = \text{ل} + \text{٢ ے} \sqrt{- \frac{\text{٢ ح}}{\text{ے}} - ١}$$

وبادخال ے تحت علامة الجذر الذى يجب ان تتغير اشارته حيث ان ے سالب يحدث

$$\text{س} = \text{ل} - ٢ \sqrt{- \text{٢ ح ے} - \text{ے}^{٢}} \qquad (٢)$$

وبوضع مقدارى (١) و (٢) فى معادلة السيكلويد وهى

$$\text{س} = \text{ح قوس حتا } \frac{\text{ح} - \text{ص}}{\text{ح}} - \sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^2} \qquad (٣)$$

تحدث معادلة المنتشر وهى

$$\text{ل} = \text{ح قوس حتا } \frac{\text{ح} + \text{ے}}{\text{ح}} + \sqrt{- \text{٢ح ے} - \text{ے}^2} \qquad (٤)$$

فلنفرض الآن اننا جعلنا المحورين هما المستقيمان هـ س' و هـ ص' وفرضنا أن س' و ص' هما الاحداثيان الجديدان لنقطة حيثما اتفق ن من المنتشر بحيث ان

شكل ٣٩

$$\text{و ى} = \text{ط ح} \text{ ، } \text{ى هـ} = \text{٢ ح}$$

فيكون

$$\text{ل} = \text{وى} - \text{ىے} = \text{ط ح} - \text{س}' \text{ ، }$$

$$\text{ے} = \text{ن ك} - \text{ے ك} = \text{ص}' - \text{٢ ح}$$

وبوضع مقدارى ل و ے هذين فى المعادلة (٤) تصير معادلة المنتشر بالنسبة للمحورين الجديدين هى

$$\text{ط ح} - \text{س}' = \text{ح قوس حتا } \frac{\text{ص}' - \text{ح}}{\text{ح}} + \sqrt{\text{٢ ح ص}' - \text{ص}'^2}$$

أو

$$\text{س}' = \text{ح} \left(\text{ط} - \text{قوس حتا } \frac{\text{ص}' - \text{ح}}{\text{ح}} \right) - \sqrt{\text{٢ ح ص}' - \text{ص}'^2}$$

وبسبب أن كل قوسين مكملين لبعضهما يكون جيبا تمامهما متساويين فى المقدار المطلق ومختلفين فى الاشارة يكون

$$\text{س}' = \text{ح قوس جتا } \frac{\text{ح} - \text{ص}'}{\text{ح}} - \sqrt{\text{٢ ح ص} - \text{ص}'^2}$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (٣) يرى أن منتشر السيكلويد سيكلويد مساوله وموضوع بالنسبة للمحورين وس' و وص' كوضع السيكلويد المفروض بالنسبة للمحورين الاصليين

فى طول قوس من سيكلويد

بند ١٩٩ المستقيم م ن الذى هو ضعف ط ن هو نصف قطر الانحناء فى نقطة م من السيكلويد الانتشارى أو المماس فى نقطة ن للسيكلويد المنتشر وزيادة على ذلك ان نصف قطر الانحناء فى نقطة و معدوم حيث ان العمودى م ط معدوم فى هذه النقطة وبما أن قوس المنتشر مساو للفرق بين نصفى قطرى الانحناء المتطرفين فيكون

$$\text{قوس و ن} = \text{م ن} = ٢\,\text{ن ط}$$

وبالعود الى السيكلويد المفروض يمكن أن يقال ان القوس ح م يساوى ٢ م ن ولنبحث الآن عن مقدار هذا القوس بدلالة احداثيى نهايتيه فنقول ان

$$\text{قوس ح م} = ٢\,\text{م ن} = ٢\sqrt{٢\,\text{ح} \times \text{م ك}}$$

وحيث ان م ك = ٢ ح − ص فيكون

$$\text{قوس ح م} = ٢\sqrt{٤\,\text{ح}^{٢} - ٢\,\text{ح ص}}$$

بند ٢٠٠ يمكن أيضا تحصيل هذه النتيجة بالحساب لاننا اذا فرضنا ان ح م = ى قوس محسوب بالابتداء من الرأس ح يكون

$$\text{ءى} = \pm\,\text{ءص}\sqrt{١ + \frac{\text{ءس}^{٢}}{\text{ءص}^{٢}}}$$

لكن

$$\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{\text{ص}}{\sqrt{٢\,\text{ح ص} - \text{ص}^{٢}}}$$

فاذن يكون

$$\text{ءى} = \pm\,\text{ءص}\,\frac{\sqrt{٢\,\text{ح}}}{\sqrt{٢\,\text{ح} - \text{ص}}}$$

وحيث ان القوس ح م يأخذ فى النقص متى تزايد ص فيجب أخذ اشارة − وكتابة

$$\text{ءى} = -\,\text{ءص}\,\frac{\sqrt{٢\,\text{ح}}}{\sqrt{٢\,\text{ح} - \text{ص}}} = \text{ء}\left(٢\sqrt{٢\,\text{ح}}\sqrt{٢\,\text{ح} - \text{ص}}\right)$$

واذن يكون

م = ٢ √(٢ح) √(٢ح − ص) + ث

أو

م = ٢ √(٤ح² − ٢ح ص) + ث

وحرف ث رمز لثابت يعين بجعل ص = ٢ح وملاحظة أن م يكون اذ ذاك معدوما واذن يكون ث = ٠ ويوجد المقدار المتقدم وهو

قوس ح م = ٢ √(٤ح² − ٢ح ص)

ثم اذا فرض أن ص = ٠ يكون

قوس ح و = ٤ح

فاذن يكون

قوس و ح وَ = ٨ح

ويعلم من ذلك أن قوس السيكلويد بأكمله يساوي أربعة أمثال قطر الدائرة الراسمة

الفصـــــل الخـامس

فى انحناء المنحنيات المستوية

فى مقـدار نصف قطر الانحناء حينما يكون المتغير الغـــير المتعلق حينما اتفق

بـ٢٠٢ـد لما كان س متغيرا غير متعلق قد وجدنا أن

$$\text{نخ} = \frac{\left(1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}}$$

فلنفرض الآن ان س و ص دالتان لمتغير آخر وليكن ع ونبحث بهـذا الفرض عن مقدار نخ فمن المعلوم (بـ١٨١ـد) ان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لا تتغير صورتها وانه يجب أن تعوّض $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ بالمقدار $\frac{\text{ءس ء}^2\text{ص} - \text{ءص ء}^2\text{س}}{\text{ءس}^3}$ واذن يكون

$$\text{نخ} = \frac{\left(1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ءس ء}^2\text{ص} - \text{ءص ء}^2\text{س}}{\text{ءس}^3}}$$

أو

$$\text{نخ} = \frac{\left(\text{ءس}^2 + \text{ءص}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\text{ءس ء}^2\text{ص} - \text{ءص ء}^2\text{س}} \qquad (1)$$

وهـذا القانون فيه تفاضلا س و ص مأخوذان باعتبار ع متغيرا غير متعلق

مثال ــ السيكلويدمين باجتماع المعادلتين

$$\text{س} = \text{ح}\,(\text{ن} - \text{حا ن}) \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{ح}\,(1 - \text{حتا ن})$$

ومن هنا يستنتج باعتبار أن ن متغير غير متعلق أن

$$\text{ىس} = \text{ح}\,(\text{١} - \text{حتا ن})\,\text{ىن} \quad \text{،} \quad \text{ى}^{\text{٢}}\text{س} = \text{ح حا ن ىن}^{\text{٢}} \quad \text{،}$$

$$\text{ىص} = \text{ح حا ن ىن} \quad \text{،} \quad \text{ى}^{\text{٢}}\text{ص} = \text{ح حتا ن ىن}^{\text{٢}}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\text{ىس}^{\text{٢}} + \text{ىص}^{\text{٢}} = (\text{١} - \text{٢حتا ن} + \text{حتا}^{\text{٢}}\text{ن} + \text{حا}^{\text{٢}}\text{ن})\,\text{ح}^{\text{٢}}\,\text{ىن}^{\text{٢}} \quad \text{،}$$

$$\text{ىس ى}^{\text{٢}}\text{ص} - \text{ىص ى}^{\text{٢}}\text{س} = (\text{حتا ن} - \text{حتا}^{\text{٢}}\text{ن} - \text{حا}^{\text{٢}}\text{ن})\,\text{ح}^{\text{٢}}\,\text{ىن}^{\text{٣}}$$

أو

$$\text{ىس}^{\text{٢}} + \text{ىص}^{\text{٢}} = \text{٢}\,(\text{١} - \text{حتا ن})\,\text{ح}^{\text{٢}}\,\text{ىن}^{\text{٢}} \quad \text{،}$$

$$\text{ىس ى}^{\text{٢}}\text{ص} - \text{ىص ى}^{\text{٢}}\text{س} = -(\text{١} - \text{حتا ن})\,\text{ح}^{\text{٢}}\,\text{ىن}^{\text{٣}}$$

وإذن يكون

$$\text{خ} = \text{٢}^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} \times \frac{(\text{١} - \text{حتا ن})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}\,\text{ح}^{\text{٣}}\,\text{ىن}^{\text{٣}}}{(\text{١} - \text{حتا ن})\,\text{ح}^{\text{٢}}\,\text{ىن}^{\text{٣}}} = \text{٢ح}\sqrt{\text{٢}}\,(\text{١} - \text{حتا ن})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$$

لكن

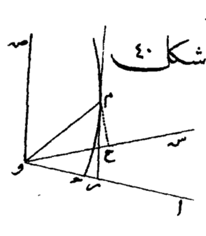
$$\text{١} - \text{حتا ن} = \frac{\text{ص}}{\text{ح}}$$

فإذن يكون

$$\text{خ} = \text{٢ح}\sqrt{\text{٢}}\sqrt{\frac{\text{ص}}{\text{ح}}} = \text{٢}\sqrt{\text{٢ح ص}}$$

في مقدار نصف قطر الانحناء حينما تكون الاحداثيات قطبية

بند ٢٠٣ القانون (١) يوصل الى مقدار نصف قطر الانحناء في نقطة م بدلالة الاحداثيات القطبية لهذه النقطة ولذلك نمد من القطب محورين متعامدين وس و وص وليكن



$$\text{س و ا} = \text{ل} \quad \text{،} \quad \text{و ع} = \text{س} \quad \text{،}$$

$$\text{م ع} = \text{ص} \quad \text{،} \quad \text{و م} = \text{د} \quad \text{،}$$

$$\text{م و ا} = \text{و}$$

فيكون

$$\text{س} = \text{د حتا}\,(\text{و} - \text{ل}) \quad \text{،}$$

$$\text{ص} = \text{د حا}\,(\text{و} - \text{ل})$$

وبجعل و ــ ل = و‘ لاجل الاختصار يكون

$$\text{س} = \text{ر حتا و‘} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{ر حا و‘}$$

ومن هنا ينتج بملاحظة ان ء و‘ = ء و

$$\text{ء س} = \text{ء ر حتا و‘} - \text{ر ء و حا و‘} \quad \text{و}$$

$$\text{ء ص} = \text{ء ر حا و‘} + \text{ر ء و حتا و‘} \quad \text{و}$$

$$\text{ء}^{٢}\text{ س} = \text{ء}^{٢}\text{ ر حتا و‘} - ٢\,\text{ء ر ء و حا و‘} - \text{ر ء و}^{٢}\text{ حتا و‘} \quad \text{و}$$

$$\text{ء}^{٢}\text{ ص} = \text{ء}^{٢}\text{ ر حا و‘} + ٢\,\text{ء ر ء و حتا و‘} - \text{ر ء و}^{٢}\text{ حا و‘}$$

واذن يكون

$$\text{ء س}^{٢} + \text{ء ص}^{٢} = \text{ء ر}^{٢}\text{ حتا}^{٢}\text{ و‘} + \text{ر}^{٢}\text{ حا}^{٢}\text{ و‘ ء و}^{٢} + \text{ء ر}^{٢}\text{ حا}^{٢}\text{ و‘}$$
$$+ \text{ر}^{٢}\text{ حتا}^{٢}\text{ و‘ ء و}^{٢} = \text{ء ر}^{٢}\,(\text{حا}^{٢}\text{ و‘} + \text{حتا}^{٢}\text{ و‘})$$
$$+ \text{ر}^{٢}\text{ ء و}^{٢}\,(\text{حا}^{٢}\text{ و‘} + \text{حتا}^{٢}\text{ و‘})$$

ومن بعد الاختصار يحدث

$$\text{ء س}^{٢} + \text{ء ص}^{٢} = \text{ء ر}^{٢} + \text{ر}^{٢}\text{ ء و}^{٢} \qquad (٢)$$

وبمثل ذلك يكون

$$\text{ء س ء}^{٢}\text{ ص} - \text{ء ص ء}^{٢}\text{ س}$$
$$= (\text{ء ر حتا و‘} - \text{ر ء و حا و‘})\,(\text{ء}^{٢}\text{ ر حا و‘} + ٢\,\text{ء ر ء و حتا و‘} - \text{ر ء و}^{٢}\text{ حا و‘})$$
$$- (\text{ء ر حا و‘} + \text{ر ء و حتا و‘})\,(\text{ء}^{٢}\text{ ر حتا و‘} - ٢\,\text{ء ر ء و حا و‘} - \text{ر ء و}^{٢}\text{ حتا و‘})$$
$$= \text{ء}^{٢}\text{ ر}\,(\text{ء ر حا و‘ حتا و‘} - \text{ر ء و حا}^{٢}\text{ و‘} - \text{ء ر حا و‘ حتا و‘} - \text{ر ء و حتا}^{٢}\text{ و‘})$$
$$+ ٢\,\text{ء ر}^{٢}\,(\text{ء و حتا}^{٢}\text{ و‘} + \text{ء و حا}^{٢}\text{ و‘}) + \text{ر}^{٢}\,(\text{حا}^{٢}\text{ و‘ ء و}^{٣} + \text{حتا}^{٢}\text{ و‘ ء و}^{٣})$$

وبالاختصار يحدث

$$\text{ء س ء}^{٢}\text{ ص} - \text{ء ص ء}^{٢}\text{ س} = ٢\,\text{ء ر}^{٢}\text{ ء و} - \text{ر ء و ء}^{٢}\text{ ر} + \text{ر}^{٢}\text{ ء و}^{٣} \qquad (٣)$$

فاذا وضع المقداران (٢) و (٣) فى قانون (١) يتحصل

$$خ=\frac{\left(dى^2+ى^2\,dو^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\,dى^2\,dو-ى\,d^2ى\,dو+ى^2\,dو^3}$$

أو

$$خ=\frac{\left(ى^2+\frac{dى^2}{dو^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{ى^2+2\frac{dى^2}{dو^2}-ى\frac{d^2ى}{dو^2}} \qquad (٤)$$

ويمكن تحصيل هذه النتيجة بكيفية أبسط من الكيفية المتقدمة وذلك بتطبيق المحور وس على وم ولذلك يلزم جعل ل = و فبذلك يكون

$$dس=dى \quad و \quad dص=ى\,dو \quad و$$

$$d^2س=d^2ى-ى\,dو^2 \quad و \quad d^2ص=2\,dى\,dو$$

بند ٢٠٤ أحيانا يستعمل في قانون نصف قطر الانحناء بدل نصف القطر البورى ى مقداره العكسى فاذا فرضنا أن

$$ى=\frac{1}{ن}$$

يكون

$$dى=-\frac{dن}{ن^2} \quad و \quad d^2ى=\frac{2\,dن^2-ن\,d^2ن}{ن^3}$$

واذن يكون

$$خ=\frac{\left(\frac{1}{ن^2}+\frac{1}{ن^4}\frac{dن^2}{dو^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{ن^2}+\frac{2}{ن^4}\frac{dن^2}{dو^2}+\frac{ن\,d^2ن-2\,dن^2}{ن^4\,dو^2}}=\frac{\left(\frac{1}{ن^2}+\frac{1}{ن^4}\frac{dن^2}{dو^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{ن^2}+\frac{1}{ن^3}\cdot\frac{d^2ن}{dو^2}}$$

او

$$خ=\frac{\left(ن^2+\frac{dن^2}{dو^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{ن^3\left(ن+\frac{d^2ن}{dو^2}\right)} \qquad (٥)$$

مثالان

بند ٢٠٥ (الاول) تطبيق على المنحنيات ذات الدرجة الثانية — المعادلة العمومية للمنحنيات ذات الدرجة الثانية منسوبة الى احدى بورها والى المحور البورى هى

$$ر = \frac{ح}{١ + هـ حتا و} \quad \text{أو} \quad ن = \frac{١ + هـ حتا و}{ح}$$

وفى هذه الحالة يكون

$$ءن = - \frac{هـ}{ح} حا و ءو \quad و \quad ء^٢ن = - \frac{هـ}{ح} حتا و ءو^٢$$

ويوصل قانون (٥) الى

$$غ = \frac{\left[\frac{(١+هـ حتا و)^٢}{ح^٢} + \frac{هـ^٢}{ح^٢} حا^٢ و\right]^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{(١+هـ حتا و)^٣}{ح^٣}\left[\frac{١+هـ حتا و}{ح} - \frac{هـ}{ح} حتا و\right]}$$

أو

$$غ = ح \frac{(١+٢ هـ حتا و + هـ^٢)^{\frac{٣}{٢}}}{(١+ هـ حتا و)^٣}$$

(الثانى) تطبيق على الحلزون اللوغاريتمى الذى معادلته $ر = ح هـ^{م و}$ — من هذه المعادلة يستخرج

$$\frac{ءر}{ءو} = م ح هـ^{م و} = م ر \quad و \quad \frac{ء^٢ر}{ءو^٢} = \frac{م ءر}{ءو} = م^٢ ر$$

وبوضع هذين المقدارين فى قانون (٤) يحدث

$$غ = \frac{\left[ر^٢(١+م^٢)\right]^{\frac{٣}{٢}}}{ر^٢(١+م^٢)}$$

او

$$غ = ر\sqrt{١+م^٢}$$

وليكن مك العمودى و وك تحت العمودى فى النقطة المعتبرة فن المثلث ك وم القائم الزاوية يحدث

$$م ك = \sqrt{وم^٢ + وك^٢} = \sqrt{ د^٢ + د^٢ طا^٢ وم ك}$$

لكن

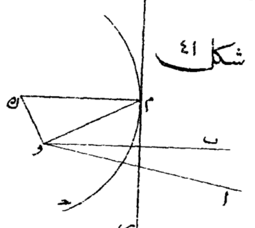
$$طا و م ك = طتا و م ر = م$$

فاذن يكون

$$م ك = د \sqrt{١ + م^٢} = خ$$

ومن هنا يعلم أن نهاية تحت العمودى وهى ك هى مركز الانحناء

ولاجل ايجاد معادلة المنتشر نأخذ محورا قطبيا جديدا وليكن و ب بحيث يكون مائلا على الاول بقدر الزاوية ل ونفرض أن ك نقطة حيثما اتفق من المسار وليكن و ك = دَ و ك و ب = وَ فيكون



$$دَ = م د = م ح هـ^{م و}$$

لكن

$$وَ + ل = و + \frac{ط}{٢}$$

فاذن تكون معادلة المنتشر هى

$$دَ = م ح هـ^{م وَ} \times م هـ^{م (ل - \frac{ط}{٢})}$$

وحيث كانت الزاوية ل اختيارية فنعين هذه الكمية بحيث يكون

$$م هـ^{م (ل - \frac{ط}{٢})} = ١$$

وبذلك يكون

$$لوَم = م (ل - \frac{ط}{٢}) = ٠ \quad أو \quad ل = \frac{ط}{٢} - \frac{لوَم}{م}$$

وتصير معادلة المنتشر هي

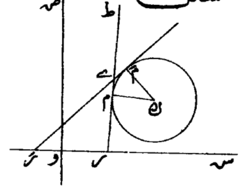
$$ق' = ح هـ^{م و'}$$

ومن هنا يتضح أن المنتشر هو حلزون لوغاريتمي يساوي الاول الا انه مخالف له في الوضع

في انحناء المنحنيات المستوية

بند ٢٠٦ يجب اعتبار انحناء محيط الدائرة ثابتا في جميع نقطه وأكبر كلما كان نصف قطره س أصغر أي كلما كان المقدار العكسي $\frac{1}{س}$ أكبر ولذا قد جعلت الكمية $\frac{1}{س}$ مقياسا لانحناء الدائرة

ويمكن تصور هذه العبارة بطريقة أخرى أوضح وذلك باعتبار دائرة مماسة لمستقيم في نقطة من نقطه وتبعيد المركز شيأ فشيأ على العمود المقام على هذا المستقيم من النقطة المذكورة فالدائرة المتحركة تصير في كل وضع من أوضاعها محصورة بين المستقيم الثابت والدائرة السابقة لها وبناء على ذلك تقرب شيأ فشيأ من المستقيم كلما كبر نصف قطرها



اذا تقرر هذا فليكن م ر و م' ر' مماسين لمحيط دائرة نصف قطرها م ك يساوي س ولنفرض ان ط ى م' = ر فيكون

$$قوس م م' = س ر$$

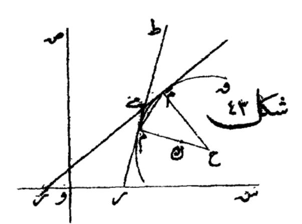
حيث كانت زاوية م ك م' تساوي ط ى م' واذن يكون

$$\frac{1}{س} = \frac{ر}{قوس م م'}$$

ومن هنا يعلم ان انحناء الدائرة يساوي خارج قسمة الزاوية الواقعة بين مماسين على القوس المحصور بين نقطتي التماس

بند ٢٠٧ ولنعتبر الآن منحنيا حيثما اتفق ح م م' ق ولتكن نقطة ح نقطة ثابتة مأخوذة على هذا المنحني ولنفرض ان ح م = ر و م م' = ف ر وان ى الزاوية م ر س و ى' الزاوية م' ر' س و ف ى الفرق بين هاتين الزاويتين أعني الزاوية ط ى م' فاذا كان المنحني

محيط دائرة فان انحناءه فى نقطة م يكون هو $\frac{ف ے}{ف ر}$ وتكون هذه النسبة غير متعلقة بالكمية ف ر
واذا كان المنحنى حيثما اتفق فان النسبة
$\frac{ف ے}{ف ر}$ التى تتغير مع تغيير ف ر تسمى
الانحناء المتوسط للقوس م مَ ونصف
قطر الدائرة التى فيها يكون بينهما الماسان
الممدودان من نهايتى قوس يساوى ف ر
زاوية تساوى ف ے يسمى نصف قطر
الانحناء المتوسط ونصف قطر هذه الدائرة
هو $\frac{ف ر}{ف ے}$ فاذا فرضنا الآن ان نقطة مَ



تقرب قربا لانهائيا من نقطة م فان النسبة $\frac{ف ے}{ف ر}$ تميل الى $\frac{ى ے}{ى ر}$ التى يقال لها انحناء المنحنى فى نقطة م فاذا تصورنا دائرة انحناؤها ثابت وفرضنا ان نخ نصف قطرها يكون

$$\frac{١}{نخ} = \frac{ى ے}{ى ر} \quad \text{أو} \quad نخ = \frac{ى ر}{ى ے}$$

فاذا أخذ على الجزء السفلى من العمودى طول م لَ = نخ تكون الدائرة المرسومة بجعل نقطة لَ مركزا ونصف قطرها م لَ هى دائرة الانحناء ونصف قطر هذه الدائرة ومركزها يكونان هما نصف قطر ومركز الانحناء فى نقطة م
والزاوية ى ے الواقعة بين المماسين الممدودين من نهايتى قوس صغير جدا تسمى زاوية التماس وحينئذ يمكن أن يقال ان انحناء أى منحن يساوى زاوية التماس مقسومة على تفاضل القوس

فى بيان ان دائرة الانحناء هى الدائرة الالتصاقية

بند ٢٠٨ دائرة الانحناء هى نفس الدائرة الالتصاقية المعينة بموجب نظرية التماسات لان

$$ى ر = ى س \sqrt{١ + \frac{ى ص^٢}{ى س^٢}} \quad و$$

$$ى ے = ى \left(\text{قوس طا} \frac{ى ص}{ى س} \right) = \frac{ى \frac{ى ص}{ى س}}{١ + \frac{ى ص^٢}{ى س^٢}}$$

وإذن يكون

$$\frac{\text{ءر}}{\text{ءى}} = \text{نخ} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}}\left(1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}\right)}{\frac{\text{ء}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}{\text{ءس}}}$$

أو

$$\text{نخ} = \frac{\left(1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}}$$

ومن هنا يتضح ان نخ أى نصف قطر الانحناء يساوى نصف قطر الدائرة الالتصاقية وبناء على هذا تكون دائرة الانحناء منطبقة على الدائرة الالتصاقية

بند ٩٠ قد أثبتنا أن نصف قطر الانحناء هو عين نصف قطر الدائرة الالتصاقية باستنتاج مقدار هذا الاخير من مقدار نصف قطر الانحناء ويمكن تحصيل هذه النتيجة باستعمال السير العكسى أعنى باستنتاج مقدار نصف قطر الانحناء من مقدار نصف قطر الدائرة الالتصاقية لان نصف قطر الدائرة الالتصاقية فى نقطة م هو

$$\text{نخ} = \frac{\left(1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}} = \text{ءس}\sqrt{1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}} : \frac{\frac{\text{ء}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}{\text{ءس}}}{1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}}$$

لكن

$$\text{ءس}\sqrt{1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}} = \sqrt{\text{ءس}^2 + \text{ءص}^2} = \text{ءر} \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{ء}\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}}{1 + \frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}} = \text{ء}\left(\text{قوس طا}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) = \text{ءى}$$

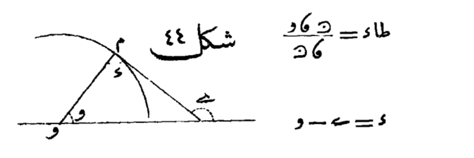
واذن يكون

$$\text{نخ} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءے}}$$

في مقدار نصف قطر الانحناء في حالة الاحداثيات القطبية

بند ٢١٢ لاجل ايجاد مقدار نصف قطر الانحناء في حالة الاحداثيات القطبية نستعمل القانون $\text{نخ} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءے}}$ ونرمز بحرف ى لزاوية ميل المماس في نقطة م على نصف القطر البورى فيكون

$$\text{طاى} = \frac{\text{ن ءو}}{\text{ءن}}$$



شكل ٤٤

لكن

$$\text{ى} = \text{ے} - \text{و}$$

فاذن يكون

$$\text{طتا}(\text{ى} - \text{و}) = \frac{1}{\text{ن}} \frac{\text{ءن}}{\text{ءو}} \qquad (1)$$

ومن هنا يستنتج ان

$$\frac{\text{ءو} - \text{ءے}}{\text{جا}^{2}(\text{و} - \text{ے})} = \text{ء}\left(\frac{1}{\text{ن}} \frac{\text{ءن}}{\text{ءو}}\right) \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{ءے}}{\text{ءو}} = 1 - \text{جا}^{2}(\text{ے} - \text{و}) \frac{\text{ء}}{\text{ءو}}\left(\frac{1}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{ءن}}{\text{ءو}}\right)$$

لكن من معادلة (١) يحدث

$$\text{جا}^{2}(\text{ے} - \text{و}) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{ءن}}{\text{ءو}}\right)^{2}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{ءے}}{\text{ءو}} = \frac{1 + \left(\frac{1}{\text{ن}} \cdot \frac{\text{ءن}}{\text{ءو}}\right)^{2} - \frac{\text{ء}}{\text{ءو}}\left(\frac{1}{\text{ن}} \frac{\text{ءن}}{\text{ءو}}\right)}{1 + \left(\frac{1}{\text{ن}} \frac{\text{ءن}}{\text{ءو}}\right)^{2}} \qquad (2)$$

وغير ذلك فان

$$ع_ن = \sqrt{ع_د^٢ + د^٢ ع_و^٢} = د \sqrt{\frac{ع_د^٢}{د^٢} + ع_و^٢}$$

أو

$$\frac{ع_ن}{ع_و} = د \left[١ + \left(\frac{١}{د} \frac{ع_د}{ع_و} \right)^٢ \right]^{\frac{١}{٢}} \qquad (٣)$$

وبقسمة معادلة (٣) على معادلة (٢) يحدث

$$خ = \frac{ع_ن}{ع_ح} = \frac{\left(د^٢ + \frac{ع_د^٢}{ع_و^٢} \right)^{\frac{٣}{٢}}}{د^٣ + ٢ \frac{ع_د^٢}{ع_و^٢} - د \frac{ع_د^٢}{ع_و^٢}}$$

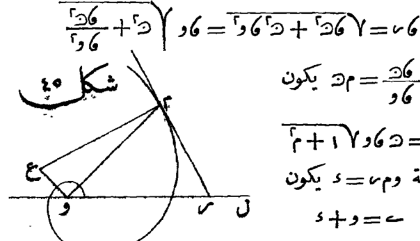
وهو قانون قد سبق ايجاده

بند ٢١١ ولنطبق هذه النتيجة على الحلزون اللوغاريتمى الذى معادلته

$$د = حـ هـ^{م و}$$

فنقول ليكن م و = د و م و ل = و الاحداثيين القطبيين للنقطة م فيكون

$$ع_ن = \sqrt{ع_د^٢ + د^٢ ع_و^٢} = ع_و \sqrt{د^٢ + \frac{ع_د^٢}{ع_و^٢}}$$



وبملاحظة ان $\frac{ع_د}{ع_و} = م د$ يكون

$$ع_ن = د ع_و \sqrt{١ + م^٢}$$

واذا جعلنا زاوية و م ن = ى يكون

$$ح = و + ى$$

وحيث كانت الزاوية ى ثابتة فى المنحنى

اللوغاريتمى بداعى ان طا ى $= \frac{١}{م}$ فيكون $ع_ح = ع_و$ واذن يكون

$$خ = \frac{ع_ن}{ع_ح} = د \sqrt{١ + م^٢}$$

تمـــــرينات

أنصاف اقطار انحناء المنحنيات الآتية

١ $\quad ٣\,\text{ح}\,\text{ص}^{٢} = ٢\,\text{س}^{٣} \qquad \text{نخ}^{٢} = \frac{(٢\,\text{ح} + ٣\,\text{س})^{٣}}{٣\,\text{ح}^{٢}}\,\text{س}$

٢ $\quad \text{ص} = \frac{\text{ح}}{٢}\left(\text{هـ}^{\frac{\text{س}}{\text{ح}}} + \text{هـ}^{-\frac{\text{س}}{\text{ح}}}\right) \qquad \text{نخ} = \frac{\text{ص}^{٢}}{٢\,\text{ح}}$

٣ $\quad \text{ن} = \text{ح}\,(٢\,\text{حتا}\,\text{و} \pm ١) \qquad \text{نخ} = \text{ح}\,\frac{(٥ \pm ٤\,\text{حتا}\,\text{و})^{\frac{٣}{٢}}}{٣\,(٣ \pm ٢\,\text{حتا}\,\text{و})}$

٤ $\quad \text{ن}^{٢} = \text{ح}^{٢}\,\text{حتا}\,٢\,\text{و} \qquad \text{نخ} = \frac{\text{ح}^{٢}}{٣\,\text{ن}}$

الفصل السادس

فى المنحنيات المضاعفة الانحناء

فى معادلتى المماس

بند ٢١٢ المنحنيات المضاعفة الانحناء هى التى جميع نقطها غير موجودة فى مستو واحد والمنحنى المضاعف الانحناء يكون مبينا كما لا يخفى بمعادلتين مثل

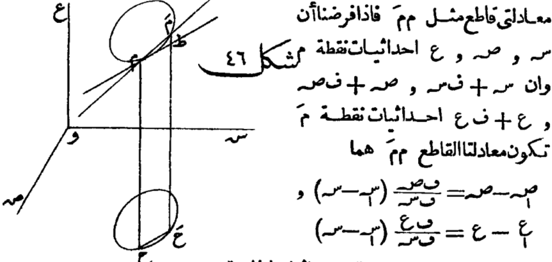
$$\text{د}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص}\ \text{و}\ \text{ع})=0\quad \text{و} \qquad (1)$$

$$\text{د}_1(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص}\ \text{و}\ \text{ع})=0 \qquad (2)$$

وهما معادلتا سطحين يمر كل منهما بهذا المنحنى

وفى العادة يجعل السطحان المساعدان اسطوانتين موازيتين للمحاور واذ ذاك يكون المنحنى مبينا بمعادلتين لا تشتمل كلتاهما الاعلى متغيرين فقط

بند ٢١٣ ولاجل تحصيل معادلتى المماس لمنحن من نقطة كنقطة م نبحث فى أول الامر عن معادلتى قاطع مثل م مَ فاذا فرضنا أن



س و ص و ع احداثيات نقطة م وان س + ف س و ص + ف ص و ع + ف ع احداثيات نقطة مَ تكون معادلتا القاطع م مَ هما

$$\text{ص}_1-\text{ص}=\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}(\text{س}_1-\text{س})\quad \text{و}$$

$$\text{ع}_1-\text{ع}=\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}(\text{س}_1-\text{س})$$

و س_1 و ص_1 و ع_1 رموز للاحداثيات الجارية

فاذا قربت نقطة مَ قربا لانهائيا من نقطة م يصير القاطع م مَ عند النهاية مماسا للمنحنى فى نقطة م ويميل المعاملان الزاويان $\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}$ و $\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}$ الى $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ و $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

وتكون معادلتا المماس هما

$$\left.\begin{aligned} ص_١ - ص &= \frac{ءص}{ءس}(س_١ - س) \quad و \\ ع_١ - ع &= \frac{ءع}{ءس}(س_١ - س) \end{aligned}\right\} \quad (أ)$$

وفيهما $\frac{ءص}{ءس}$ و $\frac{ءع}{ءس}$ مشتقتا ص و ع بالنسبة للمتغير س فاذا قسمت هاتان المعادلتان على بعضهما توجد معادلة مسقط المماس على المستوى صع وهى

$$ص_١ - ص = \frac{ءص}{ءع}(ع_١ - ع)$$

ومن هذه المعادلات يتضح ان مسقط المماس على كل مستو احداثى مماس لمسقط المنحنى على هذا المستوى وغير ذلك فهذا ماينتج من أنه حينما تقع نقطة مَ على نقطة م تقع نقطة حَ على نقطة ح

بـ٢١٤ـد المعاملان التفاضليان $\frac{ءص}{ءس}$ و $\frac{ءع}{ءس}$ يتحصل عليهما بأخذ تفاضل المعادلتين (١) و (٢) فيحدث

$$\left.\begin{aligned} \frac{ءد}{ءس} + \frac{ءد}{ءص}\frac{ءص}{ءس} + \frac{ءد}{ءع}\frac{ءع}{ءس} &= ٠ \quad و \\ \frac{ءد_١}{ءس} + \frac{ءد_١}{ءص}\frac{ءص}{ءس} + \frac{ءد_١}{ءع}\frac{ءع}{ءس} &= ٠ \end{aligned}\right\} \quad (أَ)$$

وباستخراج $\frac{ءص}{ءس}$ و $\frac{ءع}{ءس}$ من هاتين المعادلتين ووضعهما فى معادلتى (أ) توجد معادلتا المماس ويمكن الوصول اليهما كذلك بحذف $\frac{ءص}{ءس}$ و $\frac{ءع}{ءس}$ من المعادلات (أَ) و (أ) فمن معادلتى (أ) يستخرج

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص_١ - ص}{س_١ - س} \quad , \quad \frac{ءع}{ءس} = \frac{ع_١ - ع}{س_١ - س}$$

وبوضع هذين المقدارين فى معادلتى (أَ) توجد هاتان المعادلتان

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\text{ك د}}{\text{ك س}}(\text{س}_١-\text{س}) + \frac{\text{ك د}}{\text{ك ص}}(\text{ص}_١-\text{ص}) + \frac{\text{ك د}}{\text{ك ع}}(\text{ع}_١-\text{ع}) = ٠ \quad \text{و} \\ \frac{\text{ك د}_١}{\text{ك س}}(\text{س}_١-\text{س}) + \frac{\text{ك د}_١}{\text{ك ص}}(\text{ص}_١-\text{ص}) + \frac{\text{ك د}_١}{\text{ك ع}}(\text{ع}_١-\text{ع}) = ٠ \end{array}\right\} (\text{ب})$$

ومن هنا يعلم انه يتحصل على معادلتى المماس بتعويض التفاضلات ك س و ك ص و ك ع الداخلة فى المعادلتين

$$\frac{\text{ك د}}{\text{ك س}}\,\text{ك س} + \frac{\text{ك د}}{\text{ك ص}}\,\text{ك ص} + \frac{\text{ك د}}{\text{ك ع}}\,\text{ك ع} = ٠ \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{ك د}_١}{\text{ك س}}\,\text{ك س} + \frac{\text{ك د}_١}{\text{ك ص}}\,\text{ك ص} + \frac{\text{ك د}_١}{\text{ك ع}}\,\text{ك ع} = ٠$$

بالفروق $\text{س}_١ - \text{س}$ و $\text{ص}_١ - \text{ص}$ و $\text{ع}_١ - \text{ع}$

فى زوايا ميل المماس على المحاور

بند ١٥٢ لنفرض الآن ان المحاور متعامدة ونرمز بحروف ل و ے و لَ لزوايا ميل المماس على المحاور الاحداثية و س و و ص و و ع فنرسم م ط فى شبه المنحرف م ح ح َ م َ الذى ضلعاه المتوازيان هما م ح = ع و م َ ح َ = ع + ف ع موازيا للخط ح ح َ والرمز بحرف لَ للزاوية م م َ ط أعنى زاوية ميل القاطع م م َ على المحور و ع يحدث من المثلث م م َ ط

$$\text{حتا لَ} = \frac{\text{ف ع}}{\text{م م}} = \frac{\text{ف ع}}{\sqrt{\text{ف س}^٢ + \text{ف ص}^٢ + \text{ف ع}^٢}}$$

وبفرض ر متغيرا غير متعلق يمكن أن يكتب

$$\text{حتا لَ} = \frac{\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ر}}}{\sqrt{\left(\frac{\text{ف س}}{\text{ف ر}}\right)^٢ + \left(\frac{\text{ف ص}}{\text{ف ر}}\right)^٢ + \left(\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ر}}\right)^٢}}$$

فتى انطبقت نقطة مَ على نقطة م يصير القاطع مماسا وتؤول كَ الى كَ ويكون

$$\text{حتا ك} = \frac{\frac{ء ع}{ء ر}}{\sqrt{\frac{ء س^2}{ء ر^2} + \frac{ء ص^2}{ء ر^2} + \frac{ء ع^2}{ء ر^2}}}$$

أو

$$\text{حتا ك} = \frac{ء ع}{\sqrt{ء س^2 + ء ص^2 + ء ع^2}}$$

فاذا كان $ء ع > .$ أى اذا زاد ع حينما يزيد المتغير الغير المتعلق ر يكون $\text{حتا ك} > .$ وتكون $ك < \frac{ط}{٢}$ واذا كان الامر بالعكس بان كان $ء ع < .$ يكون $\text{حتا ك} < .$ وتكون $ك > \frac{ط}{٢}$

وبمثل ذلك يوجد حتا ل و حتا ے بحيث تعلم الزوايا المطلوبة بالقوانين

$$(ح)\quad \begin{cases} \text{حتا ل} = \frac{ء س}{\sqrt{ء س^2 + ء ص^2 + ء ع^2}} \ , \\ \text{حتا ے} = \frac{ء ص}{\sqrt{ء س^2 + ء ص^2 + ء ع^2}} \ , \\ \text{حتا ك} = \frac{ء ع}{\sqrt{ء س^2 + ء ص^2 + ء ع^2}} \end{cases}$$

فاذا فرض ان القوس م مَ الصغير جدا هو ء ر يوجد كما يشاهد قريبا ان شاء الله تعالى فى (بند ٢١٨)

$$ء ر = \sqrt{ء س^2 + ء ص^2 + ء ع^2}$$

وتؤول القوانين المتقدمة الى

$$\text{حتا ل} = \frac{ء س}{ء ر} \ , \quad \text{حتا ے} = \frac{ء ص}{ء ر} \ , \quad \text{حتا ك} = \frac{ء ع}{ء ر} \quad (ء)$$

فى المســـتوى العمودى

بند ٢١٦ المستوى العمودى على المنحنى حم هو المستوى العمود على المماس م ر ومار بنقطة م فاذا رمزنا بالرموز $س_١$ و $ص_١$ و $ع_١$ للاحداثيات الجارية تكون معادلة هذا المستوى بالصورة

$$ا(س_١ - س) + ب(ص_١ - ص) + ح(ع_١ - ع) = ٠$$

وحيث كانت معادلتا المماس م ر هما

$$ص_١ - ص = \frac{ء ص}{ء س}(س_١ - س) \quad و \quad ع_١ - ع = \frac{ء ع}{ء س}(س_١ - س)$$

فلاجل أن يكون المستوى ء وداعلى هذا المستقيم يلزم أن يكون

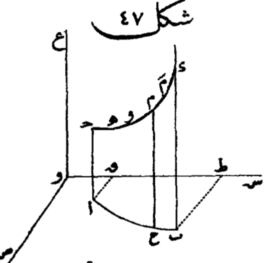
$$\frac{ب}{ا} = \frac{ء ص}{ء س} \quad , \quad \frac{ح}{ا} = \frac{ء ع}{ء س}$$

واذن تكون معادلة المستوى العمودى هى

$$(س_١ - س)ء س + (ص_١ - ص)ء ص + (ع_١ - ع)ء ع = ٠ \qquad (هـ)$$

فى تفاضل قوس من منحن مضاعف الانحناء

بند ٢١٧ لنأخذ بالاختيار نقطا عددها حيثما اتفق على قوس المنحنى حم ء ولتكن هـ و و ... و م و مَ الخ ونعتبر المضلع الشمالى حهو ... ممَ ... ء المرسوم داخل القوس حمء فأقول ان محيط هذا المضلع يميل الى نهاية معينة متى قربت رؤسه من بعضها قربا لانهائيا و زاد عدد أضلاعه الى مالانهاية وبعد ماثبت هذه القضية نصطلح على جعل هذه النهاية طولا للقوس حء ولذلك نفرض ان س و ص و ع احداثيات رأس حيثما اتفق ولتكن م وان س + ف س و ص + ف ص و ع + ف ع احداثيات النقطة التالية لها مَ فيكون



$$مم' = \sqrt{ف س^٢ + ف ص^٢ + ف ع^٢} = ف س \sqrt{١ + \left(\frac{ف ص}{ف س}\right)^٢ + \left(\frac{ف ع}{ف س}\right)^٢}$$

وحينئذ اذا رمزنا بحرف ح لمحيط المضلع يكون

$$ح = مجـ \left[ف س \sqrt{١ + \left(\frac{ف ص}{ف س}\right)^٢ + \left(\frac{ف ع}{ف س}\right)^٢} \right]$$

فاذا مال ف س الى الصفر مال $\frac{ف ص}{ف س}$ و $\frac{ف ع}{ف س}$ الى $\frac{ى ص}{ى س}$ و $\frac{ى ع}{ى س}$ ويمكن كتابة

$$\sqrt{١ + \left(\frac{ف ص}{ف س}\right)^٢ + \left(\frac{ف ع}{ف س}\right)^٢} = \sqrt{١ + \left(\frac{ى ص}{ى س}\right)^٢ + \left(\frac{ى ع}{ى س}\right)^٢} + ل$$

وحرف ل رمز لدالة تنعدم حينما ينعدم ف س واذن يكون

$$ح = مجـ \left[ف س \sqrt{١ + \left(\frac{ى ص}{ى س}\right)^٢ + \left(\frac{ى ع}{ى س}\right)^٢} \right] + مجـ (ل ف س)$$

وبموجب نظرية (بند ١٤ د) يكون

$$نها مجـ (ل ف س) = ٠$$

واذن يكون

$$نها ح = نها مجـ \left[ف س \sqrt{١ + \left(\frac{ى ص}{ى س}\right)^٢ + \left(\frac{ى ع}{ى س}\right)^٢} \right]$$

ولنفرض الآن ان س هو المتغير الغير متعلق فحيث انه يمكن اعتبار $\frac{ى ص}{ى س}$ و $\frac{ى ع}{ى س}$ دالتين للمتغير س فلنعتبر المنحنى هـ و المنسوب الى احداثيات قائمة ومعادلته هى

$$ص_١ = \sqrt{١ + \left(\frac{ى ص}{ى س}\right)^٢ + \left(\frac{ى ع}{ى س}\right)^٢}$$

وليكن ون = حـ ، وط = ى فبفرض س يتغير من حـ الى ى يكون

$$مجـ \left[ف س \sqrt{١ + \left(\frac{ى ص}{ى س}\right)^٢ + \left(\frac{ى ع}{ى س}\right)^٢} \right] = مجـ (ص_١ ف س)$$

لكن نهاية مجـ (ص ف س) هي المساحة
هـ و ن ط فيعلم من ذلك ان نهاية ع والمساحة
هـ و ن ط مبينان بعدد واحد وهذا العدد هو
الدال على طول القوس حـ ء

شكل ٤٨

بند ٢١٨ لنفرض الآن ان حـ م = ر وليكن
ولـ = س فيكون (باعتبار المقدار الرقمي)

قوس حـ م = المساحة هـ م لـ ن

وبناء على ذلك يكون

$$\text{ء}\,\text{ر} = \text{ء}(\text{المساحة هـ م لـ ن}) = \text{ء}\,\text{س}\sqrt{1+\left(\frac{\text{ء}\,\text{ص}}{\text{ء}\,\text{س}}\right)^2+\left(\frac{\text{ء}\,\text{ع}}{\text{ء}\,\text{س}}\right)^2}$$

أو

$$\text{ء}\,\text{ر} = \sqrt{\text{ء}\,\text{س}^2 + \text{ء}\,\text{ص}^2 + \text{ء}\,\text{ع}^2}$$

في نهاية النسبة الكائنة بين قوس ووتره

بند ٢١٩ يستنتج بسهولة مما تقدم كما أثبتناه في المنحنيات المستوية ان نهاية النسبة الواقعة بين قوس ووتره هي الواحد لانا لو فرضنا القوس م مَ = ف ر يكون

$$\frac{\text{قوس م مَ}}{\text{م مَ}} = \frac{\text{ف ر}}{\sqrt{\text{ف س}^2+\text{ف ص}^2+\text{ف ع}^2}} = \frac{\frac{\text{ف ر}}{\text{ف س}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}\right)^2+\left(\frac{\text{ف ع}}{\text{ف س}}\right)^2}}$$

وبالتأمل يرى ان نهاية كل من بسط ومقام الطرف الثاني هي $\sqrt{1+\left(\frac{\text{ء}\,\text{ص}}{\text{ء}\,\text{س}}\right)^2+\left(\frac{\text{ء}\,\text{ع}}{\text{ء}\,\text{س}}\right)^2}$
فاذن يكون

$$\text{نها}\,\frac{\text{قوس م مَ}}{\text{م مَ}} = ١$$

الفصـــــل السابـع

فى السطوح المنحنية والخطوط المضاعفة الانحناء

فى معادلة المستوى المماس

بند ٣٢٠ لتكن م (س و ص و ع) نقطة حيثما اتفق مأخوذة على سطح معادلته

$$\text{د}(\text{س} \,،\, \text{ص} \,،\, \text{ع}) = 0 \qquad (1)$$

فيمكن أن يتصور مرور منحنيات لا نهاية لعددها بهذه النقطة وجميع المماسات الممدودة لهذه المنحنيات من نقطة م تكون موجودة فى مستو واحد نسميه المستوى المماس للسطح فى نقطة م ولاثبات ذلك نفرض أن

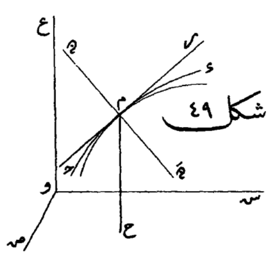
$$\text{د}_1(\text{س} \,،\, \text{ص} \,،\, \text{ع}) = 0 \qquad (2)$$

معادلة سطح جديد مار بنقطة م فيكون خط تقاطع السطحين (١) و (٢) منحنيا حم ى موجودا على السطح (١) والمماس له م ن فى نقطة م يكون مبينا بموجب ما ذكرناه فى الفصل السابق بالمعادلتين

$$\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{س}}(\text{س}-\text{س}_1)+\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ص}}(\text{ص}-\text{ص}_1)+\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ع}}(\text{ع}-\text{ع}_1)=0 \quad \text{و} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \text{د}_1}{\partial \text{س}}(\text{س}-\text{س}_1)+\frac{\partial \text{د}_1}{\partial \text{ص}}(\text{ص}-\text{ص}_1)+\frac{\partial \text{د}_1}{\partial \text{ع}}(\text{ع}-\text{ع}_1)=0 \qquad (4)$$

والمعادلة (٣) معتبرة على انفرادها تبين مستويا يمر دائما بالمماس م ن مهما كان هذا المماس حيث ان معادلة هذا المستوى لا تتعلق أصلا بالدالة د١ فاذن تكون جميع المماسات الممدودة للسطح من نقطة م موجودة فى المستوى (٣) الذى هو المستوى المماس للسطح فى نقطة م



شكل ٤٩

في معادلتي العمودي

بند ٢٢١ العمودي على السطح في نقطة م هو المستقيم المار بهذه النقطة وعمود على المستوى المماس وحيث كان هذا المستقيم مارا بنقطة م (س و ص و ع) فتكون معادلتاه بالصورة

$$س_١ - س = أ\,(ع_١ - ع) \quad ، \quad ص_١ - ص = ب\,(ع_١ - ع)$$

ولتعيين أ و ب يلاحظ ان هذا المستقيم عمود على المستوى المماس الذي معادلته

$$\frac{\partial د}{\partial س}(س_١ - س) + \frac{\partial د}{\partial ص}(ص_١ - ص) + \frac{\partial د}{\partial ع}(ع_١ - ع) = ٠ \qquad (١)$$

ولذا يلزم أن يكون

$$أ = \frac{\partial د}{\partial س} : \frac{\partial د}{\partial ع} \quad ، \quad ب = \frac{\partial د}{\partial ص} : \frac{\partial د}{\partial ع}$$

وإذن تكون معادلتا العمودي هما

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial د}{\partial ع}(س_١ - س) &= \frac{\partial د}{\partial س}(ع_١ - ع) \quad و \\ \frac{\partial د}{\partial ع}(ص_١ - ص) &= \frac{\partial د}{\partial ص}(ع_١ - ع) \end{aligned}\right\} \qquad (ب)$$

وهاتان المعادلتان يمكن وضعهما هكذا

$$\frac{س_١ - س}{\frac{\partial د}{\partial س}} = \frac{ص_١ - ص}{\frac{\partial د}{\partial ص}} = \frac{ع_١ - ع}{\frac{\partial د}{\partial ع}} \qquad (ح)$$

بند ٢٢٢ يمكن اعطاء لمعادلة المستوى المماس ولمعادلتي العمودي صورة أخرى وذلك أن يعتبر ع دالة للمتغيرين س و ص ويرمز بحرفي ح و ك للمشتقتين الجزئيتين للدالة ع بالنسبة للمتغير س وللمتغير ص أعني بجعل

$$\frac{\partial ع}{\partial س} = ح \quad ، \quad \frac{\partial ع}{\partial ص} = ك$$

فبأخذ تفاضل المعادلة

$$د(س ، ص ، ع) = ٠$$

على التوالى بالنسبة للمتغير س ثم بالنسبة للمتغير ص يكون

$$\frac{\partial د}{\partial س}\partial س + \frac{\partial د}{\partial ع}\partial ع = ٠ \quad ، \quad \frac{\partial د}{\partial ص}\partial ص + \frac{\partial د}{\partial ع}\partial ع = ٠$$

ومن هنا يستخرج

$$ح = -\frac{\partial د}{\partial س} : \frac{\partial د}{\partial ع} \quad ، \quad ك = -\frac{\partial د}{\partial ص} : \frac{\partial د}{\partial ع}$$

وحينئذ يمكن وضع معادلة المستوى المماس (ا) هكذا

$$ح(س_١ - س) + ك(ص_١ - ص) - (ع_١ - ع) = ٠$$

أو

$$ع_١ - ع = ح(س_١ - س) + ك(ص_١ - ص) \qquad (د)$$

وتؤل معادلتا (ب) المبينتان للعمودى الى

$$\left.\begin{array}{l} س_١ - س + ح(ع_١ - ع) = ٠ \quad ، \\ ص_١ - ص + ك(ع_١ - ع) = ٠ \end{array}\right\} \qquad (هـ)$$

بند ٢٢٣ اذا رمز بالحروف ل ، ى ، ط لزوايا ميل العمودى على المحاور يكون

$$حتا ل = -\frac{ح}{\sqrt{ح^٢ + ك^٢ + ١}} \quad ، \quad حتا ى = -\frac{ك}{\sqrt{ح^٢ + ك^٢ + ١}} \quad ،$$

$$حتا ط = \frac{١}{\sqrt{ح^٢ + ك^٢ + ١}}$$

فى درجة معادلة المستوى المماس بالنسبة لاحداثيات نقطة التماس

بند ٢٢٤ معادلة المستوى المماس يمكن وضعها بالصورة

$$\frac{\partial د}{\partial س}س_١ + \frac{\partial د}{\partial ص}ص_١ + \frac{\partial د}{\partial ع}ع_١ = س\frac{\partial د}{\partial س} + ص\frac{\partial د}{\partial ص} + ع\frac{\partial د}{\partial ع}$$

فاذا كانت معادلة السطح جبرية وبدرجة م تكون المشتقات $\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{س}}$ و $\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ص}}$ و $\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ع}}$ دوال جبرية بدرجة م — ١ وحينئذ يكون الطرف الاول دالة بدرجة م — ١ بالنسبة لاحداثيات نقطة التماس وأما الطرف الثاني فيظهر انه يكون بدرجة م بالنسبة لهذه الاحداثيات الا انه يمكن ايلولته الى الدرجة م — ١ باعتبار معادلة السطح وفي الواقع لتكن معادلة السطح هي

$$\text{د}(\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع}) = \text{ن} + \text{ن}_{\text{١}} + \text{ن}_{\text{٢}} + \cdots\cdot$$

و ن مجموع الحدود التي بدرجة م و $\text{ن}_{\text{١}}$ مجموع الحدود التي بدرجة م — ١ و $\text{ن}_{\text{٢}}$ مجموع الحدود التي بدرجة م — ٢ وهلم جرا فيكون

$$\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{س}} = \frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{س}} + \frac{\partial \text{ن}_{\text{١}}}{\partial \text{س}} + \frac{\partial \text{ن}_{\text{٢}}}{\partial \text{س}} + \cdots\cdot \quad \text{و}$$

$$\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ص}} = \frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{ص}} + \frac{\partial \text{ن}_{\text{١}}}{\partial \text{ص}} + \frac{\partial \text{ن}_{\text{٢}}}{\partial \text{ص}} + \cdots\cdot \quad \text{و}$$

$$\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ع}} = \frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{ع}} + \frac{\partial \text{ن}_{\text{١}}}{\partial \text{ع}} + \frac{\partial \text{ن}_{\text{٢}}}{\partial \text{ع}} + \cdots\cdot$$

فاذا ضربت هذه المعادلات بالتناظر في س و ص و ع واضيفت بعد الضرب الى بعضها يحدث

$$\text{س}\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{س}} + \text{ص}\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ص}} + \text{ع}\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ع}} = \left(\text{س}\frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{س}} + \text{ص}\frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{ص}} + \text{ع}\frac{\partial \text{ن}}{\partial \text{ع}}\right)$$

$$+\left(\text{س}\frac{\partial \text{ن}_{\text{١}}}{\partial \text{س}} + \text{ص}\frac{\partial \text{ن}_{\text{١}}}{\partial \text{ص}} + \text{ع}\frac{\partial \text{ن}_{\text{١}}}{\partial \text{ع}}\right) + \left(\text{س}\frac{\partial \text{ن}_{\text{٢}}}{\partial \text{س}} + \text{ص}\frac{\partial \text{ن}_{\text{٢}}}{\partial \text{ص}} + \text{ع}\frac{\partial \text{ن}_{\text{٢}}}{\partial \text{ع}}\right) + \cdots$$

وبموجب الخاصية الشهيرة للدوال المتجانسة يحدث

$$\text{س}\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{س}} + \text{ص}\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ص}} + \text{ع}\frac{\partial \text{د}}{\partial \text{ع}} = \text{م}\,\text{ن} + (\text{م}-\text{١})\,\text{ن}_{\text{١}} + (\text{م}-\text{٢})\,\text{ن}_{\text{٢}} + \cdots\cdot$$

$$= \text{م}(\text{ن} + \text{ن}_{\text{١}} + \cdots\cdot) - \text{ن}_{\text{١}} - \text{٢}\,\text{ن}_{\text{٢}} - \text{٣}\,\text{ن}_{\text{٣}} - \cdots\cdot$$

وحيث كانت النقطة (س و ص و ع) على السطح فيكون

$$\text{ن} + \text{ن}_{١} + \text{ن}_{٢} + \dots = ٠$$

وحينئذ تؤل المعادلة المتقدمة الى

$$\text{س}\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}} + \text{ص}\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{ص}} + \text{ع}\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{ع}} = -\text{ن}_{١} - ٢\,\text{ن}_{٢} - ٣\,\text{ن}_{٣} - \dots$$

وينتج من ذلك ان معادلة المستوى المماس تؤل الى

$$\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}}\text{س}_{١} + \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{ص}}\text{ص}_{١} + \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{ع}}\text{ع}_{١} + \text{ن}_{١} + ٢\,\text{ن}_{٢} + ٣\,\text{ن}_{٣} + \dots = ٠$$

وهذه المعادلة ليست الا بدرجة م ــ ١ بالنسبة لاحداثيات نقطة التماس

مسائل تتعلق بالمستوى المماس

بند ٢٢٥ المطلوب ان يمد من النقطة (ا و ب و ح) مستو مماس لسطح معلوم لتعيين احداثيات نقطة التماس س و ص و ع تكتب المعادلتان

$$\text{ك}(\text{س}\ \text{و}\ \text{ص}\ \text{و}\ \text{ع}) = ٠ \qquad \text{و} \qquad (١)$$

$$\text{ا}\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}} + \text{ب}\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{ص}} + \text{ح}\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{ع}} + \text{ن}_{١} + ٢\,\text{ن}_{٢} + \dots = ٠ \qquad (٢)$$

(والمعادلة الاولى معادلة السطح المعلوم)

وحيث كانت هاتان المعادلتان بثلاثة مجاهيل فتكون المسئلة غير معينة كما هو معلوم واجتماع المعادلتين (١) و (٢) يبين مسار نقط التماس والمستقيمات الواصلة من النقطة (ا و ب و ح) الى نقط التماس المختلفة يتكون منها مخروط مماس للسطح يتحصل على معادلته بحذف س و ص و ع من المعادلتين (١) و (٢) وهذه

$$\frac{\text{س}_{١} - \text{ا}}{\text{س} - \text{ا}} = \frac{\text{ص}_{١} - \text{ب}}{\text{ص} - \text{ب}} = \frac{\text{ع}_{١} - \text{ح}}{\text{ع} - \text{ح}} \qquad (٣)$$

التى تبين أحد الرواسم

فاذا كان السطح المعلوم بدرجة ثانية كان منحنى التماس مستويا لان معادلة (٢) المتحققة باحداثيات نقط التماس تكون اذ ذاك بدرجة اولى وتكون دالة على مستو

بند ٢٣٦ المطلوب أن يمد مستو مماس لسطح بحيث يكون موازيا لمستقيم معلوم لذلك نفرض أن

$$س = ا ع \quad , \quad ص = ب ع$$

هما معادلتا المستقيم المعلوم فمن الواضح انه اذا انتقل المستوى المماس بالتوازى لنفسه الى أن يمر بنقطة الاصل تكون معادلته هى

$$\frac{ك د}{ك س} س_١ + \frac{ك د}{ك ص} ص_١ + \frac{ك د}{ك ع} ع_١ = ٠$$

و يلزم اذ ذاك أن يكون مشتملا على المستقيم المعلوم وحينئذ يوجد هذا الارتباط

$$\frac{ك د}{ك س} ا + \frac{ك د}{ك ص} ب + \frac{ك د}{ك ع} = ٠ \qquad (٤)$$

وهذه المعادلة تدل على سطح يمر بجميع نقط التماس وهى مع المعادلة (١) يدلان على منحنى تماس الاسطوانة المماسة للسطح ور واسمها موازية للمستقيم المعلوم

فاذا كانت معادلة (١) جبرية وبدرجة م تكون المعادلة (٤) بدرجة (م — ١) ومن هنا يعلم أن منحنى تماس الاسطوانة المرسومة على سطح بدرجة ثانية هو منحن مستو ويتحصل على معادلة الاسطوانة المماسة بحذف س و ص و ع من المعادلتين (١) و (٤) والمعادلتين

$$س_١ - س = ا (ع_١ - ع) \quad و \quad ص_١ - ص = ب (ع_١ - ع)$$

اللتين تدلان على مستقيم موازٍ للاتجاه المعلوم ومار بنقطة من منحنى التماس

فى المستوى الالتصاقى

بند ٢٣٧ ليكن حم ل منحنيا حيثما اتفق فى الفراغ ولنفرض ان م و مَ نقطتان قريبتان من بعضهما على هذا المنحنى فالمماس م ر للمنحنى فى نقطة م والنقطة مَ يعينان مستويا فالمستوى الالتصاقى هو نهاية المستوى م ر مَ حيثما تأتى نقطة مَ وتنطبق على نقطة م

ويمكن أيضاً أن يقال ان المستوى الالتصاقى فى نقطة م هو المستوى الذى يمر بالنقطة م وبالنقطتين م١ و مَ القريبتين من نقطة م على المنحنى متى أتت النقطتان الاخيرتان وانطبقتا على م وهذا التعريف موافق للاول اذ أن المستقيم م م١ يميل الى ان يصير مماسا فى نقطة م متى قربت الثلاث نقط من بعضها

شكل ٥٠

ع ح ر م م١ مَ ل ه ق و س ص

بند ٢٢٨ حيث ان المستوى الالتصاقى للمنحنى فى نقطه م التى احداثياتها س و ص و ع يجب أن يمر بهذه النقطة فتكون معادلته بهذه الصورة

$$ا(س_١ - س) + ب_١(ص_١ - ص) + ح_١(ع_١ - ع) = ٠ \qquad (١)$$

وغير ذلك فان معادلتى المماس هما

$$ص_١ - ص = \frac{ء ص}{ء س}(س_١ - س) \quad و \quad ع_١ - ع = \frac{ء ع}{ء س}(س_١ - س) \qquad (٢)$$

وحيث يجب أن يكون هذا المستوى موجودا فى المستوى الالتصاقى فيجب مهما كان $س_١$ و $(س_١ - س)$ أن يكون

$$ا(س_١ - س) + ب_١ \frac{ء ص}{ء س}(س_١ - س) + ح_١ \frac{ء ع}{ء س}(س_١ - س) = ٠$$

أو

$$ا ء س + ب_١ ء ص + ح_١ ء ع = ٠ \qquad (٣)$$

ولنفرض الآن أن س+ف س و ص+ف ص و ع+ف ع احداثيات النقطة مَ فبوضع هذه الاحداثيات فى معادلة (١) بدلا عن $س_١$ و $ص_١$ و $ع_١$ توجد المعادلة

$$ا ف س + ب_١ ف ص + ح_١ ف ع = ٠ \qquad (٤)$$

لكن يمكن اعتبار س و ص و ع دوال لمتغير جديد مثل ر بحيث اذا فرض ان ل و ى و ط كميات تنعدم حينما ينعدم ف ر يكون

$$\text{ف س} = \text{ف ر}\,\frac{\text{ى س}}{\text{ى ر}} + \frac{\text{ف ر}^2}{1\times 2}\left(\frac{\text{ى}^2\text{س}}{\text{ى ر}^2} + \text{ل}\right) \quad \text{و}$$

$$\text{ف ص} = \text{ف ر}\,\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ر}} + \frac{\text{ف ر}^2}{1\times 2}\left(\frac{\text{ى}^2\text{ص}}{\text{ى ر}^2} + \text{ك}\right) \quad \text{و}$$

$$\text{ف ع} = \text{ف ر}\,\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ر}} + \frac{\text{ف ر}^2}{1\times 2}\left(\frac{\text{ى}^2\text{ع}}{\text{ى ر}^2} + \text{ط}\right)$$

واذن تؤل معادلة (٤) الى

$$\text{ا}_1\left[\frac{\text{ى س}}{\text{ى ر}}\,\text{ف ر} + \frac{\text{ف ر}^2}{1\times 2}\left(\frac{\text{ى}^2\text{س}}{\text{ى ر}^2} + \text{ل}\right)\right]$$

$$+\,\text{ب}_1\left[\frac{\text{ى ص}}{\text{ى ر}}\,\text{ف ر} + \frac{\text{ف ر}^2}{1\times 2}\left(\frac{\text{ى}^2\text{ص}}{\text{ى ر}^2} + \text{ك}\right)\right]$$

$$+\,\text{ج}_1\left[\frac{\text{ى ع}}{\text{ى ر}}\,\text{ف ر} + \frac{\text{ف ر}^2}{1\times 2}\left(\frac{\text{ى}^2\text{ع}}{\text{ى ر}^2} + \text{ط}\right)\right]$$

وبملاحظة المعادلة (٣) وقسمة الطرفين على $\frac{1}{2}$ ف ر^2 تؤل هذه المعادلة الاخيرة الى

$$\text{ا}_1\left(\frac{\text{ى}^2\text{س}}{\text{ى ر}^2} + \text{ل}\right) + \text{ب}_1\left(\frac{\text{ى}^2\text{ص}}{\text{ى ر}^2} + \text{ك}\right) + \text{ج}_1\left(\frac{\text{ى}^2\text{ع}}{\text{ى ر}^2} + \text{ط}\right) = ٠$$

وعند النهاية تنعدم الكميات ل و ك و ط بحيث انه اذا ضرب الطرفان اذ ذاك فى ى ر^2 يحدث

$$\text{ا}_1\,\text{ى}^2\text{س} + \text{ب}_1\,\text{ى}^2\text{ص} + \text{ج}_1\,\text{ى}^2\text{ع} = ٠ \qquad (٥)$$

وهذه المعادلة مأخوذة مع المعادلة (٣) تعين النسبتين $\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1}$ و $\frac{\text{ب}_1}{\text{ج}_1}$ فبحذف ب_1 من هاتين المعادلتين يحدث

$$\text{ا}_1(\text{ى س}\,\text{ى}^2\text{ص} - \text{ى ص}\,\text{ى}^2\text{س}) + \text{ج}_1(\text{ى ع}\,\text{ى}^2\text{ص} - \text{ى ص}\,\text{ى}^2\text{ع}) = ٠$$

ومن هنا يستخرج

$$\frac{\text{ا}_1}{\text{ج}_1} = \frac{\text{ى ص}\,\text{ى}^2\text{ع} - \text{ى ع}\,\text{ى}^2\text{ص}}{\text{ى س}\,\text{ى}^2\text{ص} - \text{ى ص}\,\text{ى}^2\text{س}}$$

وبمثل ذلك يوجد

$$\frac{\text{ب}_1}{\text{ج}_1}=\frac{\text{دع}\,\text{د}^2\text{س}-\text{دس}\,\text{د}^2\text{ع}}{\text{دس}\,\text{د}^2\text{ص}-\text{دص}\,\text{د}^2\text{س}}$$

وحيث كان أحد المعاملات أ_1 و ب_1 و ج_1 اختياريا فيؤخذ

$$\text{ج}_1=\text{دس}\,\text{د}^2\text{ص}-\text{دص}\,\text{د}^2\text{س}$$

وإذن يكون

$$\text{أ}_1=\text{دص}\,\text{د}^2\text{ع}-\text{دع}\,\text{د}^2\text{ص} \quad \text{و} \quad \text{ب}_1=\text{دع}\,\text{د}^2\text{س}-\text{دس}\,\text{د}^2\text{ع}$$

وحينئذ تكون معادلة المستوى الالتصاقى هى

$$\left.\begin{aligned}&(\text{دص}\,\text{د}^2\text{ع}-\text{دع}\,\text{د}^2\text{ص})(\text{س}_1-\text{س})\\+&(\text{دع}\,\text{د}^2\text{س}-\text{دس}\,\text{د}^2\text{ع})(\text{ص}_1-\text{ص})\\+&(\text{دس}\,\text{د}^2\text{ص}-\text{دص}\,\text{د}^2\text{س})(\text{ع}_1-\text{ع})=٠\end{aligned}\right\}\quad(٦)$$

وهناك طريقة لوضع هذه المعادلة وهى أن تكتب الكسور

$$\frac{\text{دس}}{\text{د}^2\text{س}}\;،\;\frac{\text{دص}}{\text{د}^2\text{ص}}\;،\;\frac{\text{دع}}{\text{د}^2\text{ع}}\;،\;\frac{\text{دس}}{\text{د}^2\text{س}}$$

ثم يطرح كل من هذه الكسور من الكسر السابق له فتكون بسوط هذه البواقى هى معاملات $\text{ع}_1-\text{ع}$ و $\text{س}_1-\text{س}$ و $\text{ص}_1-\text{ص}$

فى زوايا ميل المستوى الالتصاقى على المستويات الاحداثية

٢٢٩ـ اذا رمزنا بالرموز و و وَ و وً للزوايا التى يكونها عمود م ع على المستوى الالتصاقى مع المحاور وس و وص و وع وهى تساوى بالتناظر لزوايا ميل العمود المذكور على المستويات صع و سع و سص يكون

$$\text{حتاو}=\frac{\text{أ}_1}{\text{ء}_1}\;،\;\text{حتاوَ}=\frac{\text{ب}_1}{\text{ء}_1}\;،\;\text{حتاوً}=\frac{\text{ج}_1}{\text{ء}_1}\qquad(١)$$

وذلك بجعل

$$ء_1^2 = ا_1^2 + ب_1^2 + ح_1^2$$

أعنى

$$ء_1^2 = (ءص\, ء^2ع - ءع\, ء^2ص)^2 + (ءع\, ء^2س - ءس\, ء^2ع)^2 + (ءس\, ء^2ص - ءص\, ء^2س)^2 \quad (ب)$$

بند ٢٣ مقدار $ء_1^2$ يمكن وضعه بصور اخرى فيجعل

$$ءس = ا \;،\; ءص = ب \;،\; ءع = ح \quad و$$

$$ء^2س = اَ \;،\; ء^2ص = بَ \;،\; ء^2ع = حَ$$

يكون

$$ء_1^2 = (ب حَ - ح بَ)^2 + (ح اَ - ا حَ)^2 + (ا بَ - ب اَ)^2$$

أو

$$ء_1^2 = (ا^2 + ب^2 + ح^2)(اَ^2 + بَ^2 + حَ^2) - (ا اَ + ب بَ + ح حَ)^2$$

لكن اذا فرض ان $ءر$ تفاضل القوس المنتهى بنقطة م يكون

$$ءر^2 = ءس^2 + ءص^2 + ءع^2 = ا^2 + ب^2 + ح^2$$

فاذا أخذ تفاضل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير الغير متعلق ر وقسم على ٢ حدث

$$ءر\, ء^2ر = ءس\, ء^2س + ءص\, ء^2ص + ءع\, ء^2ع = ا اَ + ب بَ + ح حَ$$

واذن يكون

$$ء_1^2 = ءر^2 \left[(ء^2س)^2 + (ء^2ص)^2 + (ء^2ع)^2 - (ء^2ر)^2 \right]$$

أو

$$ء_1 = ءر \sqrt{(ء^2س)^2 + (ء^2ص)^2 + (ء^2ع)^2 - (ء^2ر)^2} \quad (ح)$$

ويمكن أيضا أن يكتب

$$ء_1 = \sqrt{(ءر\, ء^2س - ءس\, ء^2ر)^2 + (ءر\, ء^2ص - ءص\, ء^2ر)^2 + (ءر\, ء^2ع - ءع\, ء^2ر)^2}$$

(وهذا ما يتحقق منه بالتحليل)

أو $$ء_{١} = ى ر^{٣} \sqrt{\left(\frac{ى \frac{ى س}{ى ر}}{ى ر}\right)^{٢} + \left(\frac{ى \frac{ى ص}{ى ر}}{ى ر}\right)^{٢} + \left(\frac{ى \frac{ى ع}{ى ر}}{ى ر}\right)^{٢}} \quad (ى)$$

والمتغير الغير متعلق حيثما اتفق فى جميع هذه القوانين

فى العمودى الاصــلى

بند ٣١٣ العمودى الاصلى هو العمودى الموجود فى المستوى الالتصاقى وهذا المستقيم يجب أن يكون عمودا على المماس م ر وعلى العمودى م ع ومن المتطابقة

$$\left(\frac{ى س}{ى ر}\right)^{٢} + \left(\frac{ى ص}{ى ر}\right)^{٢} + \left(\frac{ى ع}{ى ر}\right)^{٢} = ١$$

يستنتج

$$\frac{ى س}{ى ر}\, ى \frac{ى س}{ى ر} + \frac{ى ص}{ى ر}\, ى \frac{ى ص}{ى ر} + \frac{ى ع}{ى ر}\, ى \frac{ى ع}{ى ر} = ٠ \quad (١)$$

والمعادلة

$$ا_{١}\, ى^{٢} س + ب_{١}\, ى^{٢} ص + ح_{١}\, ى^{٢} ع = ٠$$

يمكن كتابتها هكذا

$$ا_{١}\, ى \frac{ى س}{ى ر} + ب_{١}\, ى \frac{ى ص}{ى ر} + ح_{١}\, ى \frac{ى ع}{ى ر} = ٠ \quad (٢)$$

فيتضح من المعادلتين (١) و (٢) ان المستقيم الذى يكون مع المحاور زوايا جيوب تمامها مناسبة للمقادير

$$ى \frac{ى س}{ى ر} \;،\; ى \frac{ى ص}{ى ر} \;،\; ى \frac{ى ع}{ى ر}$$

عمود على المماس م ر وعلى العمودى م ع وحينئذ يكون هو المستقيم المطلوب وينتج من ذلك ان معادلات العمودى الاصلى تكون هى

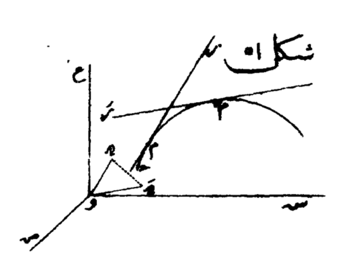
$$\frac{س_{١} - س}{ى \frac{ى س}{ى ر}} = \frac{ص_{١} - ص}{ى \frac{ى ص}{ى ر}} = \frac{ع_{١} - ع}{ى \frac{ى ع}{ى ر}}$$

الفصـــــل الثـامن

فى انحناء الخطوط الفراغيــة وفى المنحنى البريمى

فى انحناء الخطوط الفراغيــة

بـ٢٣٢ د زاوية التماس فى منحن شمالى هى كما فى المنحنى المستوى هى الزاوية ز الواقعة بين المماسين الممدودين من نهايتى قوس م مَ = ف ر صغير جدا والنهاية التى تميل اليها النسبة $\frac{ز}{ف ر}$ متى تناقص ف ر الى ما لا نهاية (وهـذه النهاية هى $\frac{ز}{ى ر}$) تسمى انحناء المنحنى وعكس الانحناء أى $\frac{ى ر}{ز}$ يقال له نصف قطر الانحناء فى نقطة م ونرمز له بالرمز نخ



بـ٢٣٣ د لتقدير ز نمـدّ من نقطة و مستقيمين وه و وهَ مساويين لوحـدة الطول وموازيين بالتناظر للماسين م ر و مَ رَ ولتـكن

$$ا = \frac{ى س}{ى ر} ، ب = \frac{ى ص}{ى ر} ، ح = \frac{ى ع}{ى ر}$$

جيوب تمام زوايا ميـل م ر أو وه على المحاور أى احـداثيات نقطة ه ولتـكن اَ و بَ و حَ احـداثيات نقطة هَ فتصير زاوية ه و هَ مساوية للزاوية ز ويكون

$$ه هَ = ٢ و ه حا \frac{١}{٢} ز = \sqrt{(اَ - ا)^٢ + (بَ - ب)^٢ + (حَ - ح)^٢}$$

وبملاحظة ان و ه = ١ يكون

$$٢ حا \frac{١}{٢} ز = \sqrt{ف ا^٢ + ف ب^٢ + ف ح^٢}$$

وعند النهاية وتعويض جيب الزاوية $\frac{1}{2}$ ز بهذه الزاوية نفسها يحدث

$$ز = \sqrt{ىا^2 + ىب^2 + ىح^2}$$

واذن يكون

$$\frac{ز}{ىر} = \frac{1}{خ} = \sqrt{\frac{ىا^2}{ىر^2} + \frac{ىب^2}{ىر^2} + \frac{ىح^2}{ىر^2}}$$

وبتعويض ا و ب و ح بمقاديرها يحدث

$$\frac{1}{خ} = \sqrt{\left(\frac{ى\frac{ىس}{ىر}}{ىر}\right)^2 + \left(\frac{ى\frac{ىص}{ىر}}{ىر}\right)^2 + \left(\frac{ى\frac{ىع}{ىر}}{ىر}\right)^2}$$

وهذا مهما كان المتغير الغير المتعلق

بند ٢٣٤ بسبب القانون (ى) من (بند ٢٣٠) يمكن أن يكتب

$$خ = \frac{ىر^3}{أ}$$

وبأخذ صورتين من التي وجدت في البند المذكور لمقدار أ يحدث أيضا

$$خ = \frac{ىر^2}{\sqrt{(ى^2س)^2 + (ى^2ص)^2 + (ى^2ع)^2 - (ى^2ر)^2}} \quad ,$$

$$خ = \frac{ىر^3}{\sqrt{(ىص\, ى^2ع - ىع\, ى^2ص)^2 + (ىع\, ى^2س - ىس\, ى^2ع)^2 + (ىس\, ى^2ص - ىص\, ى^2س)^2}}$$

بند ٢٣٥ العمود الاصلي م ن يكون مع المحاور زوايا ل و م و ن جيوب تمامها مناسبة للمقادير

$$\frac{ى\frac{ىس}{ىر}}{ىر} \quad , \quad \frac{ى\frac{ىص}{ىر}}{ىر} \quad , \quad \frac{ى\frac{ىع}{ىر}}{ىر}$$

ومن ذا يستنتج

$$حتا\, ل = خ\, \frac{ى\frac{ىس}{ىر}}{ىر} \quad , \quad حتا\, م = خ\, \frac{ى\frac{ىص}{ىر}}{ىر} \quad , \quad حتا\, ن = خ\, \frac{ى\frac{ىع}{ىر}}{ىر}$$

وباستعمال معادلات العمودي م ن وهي

$$س_١ - س = ح \, حتا ل \quad و \quad ص_١ - ص = ح \, حتام \quad و \quad ع_١ - ع = ح \, حتا ن$$

(وحرف ح رمز لبعد نقطة م عن نقطة حيثما اتفق ($س_١$ و $ص_١$ و $ع_١$) من هذا العمودي) يمكن حينئذ بتعويض حتا ل و حتا م و حتا ن بالمقادير التي وجدناها وضع هذه المعادلات هكذا

$$\left.\begin{array}{l} س_١ - س = ح \, خ \dfrac{\frac{ء^2 س}{ء ق}}{ء ق} \quad و \quad ص_١ - ص = ح \, خ \dfrac{\frac{ء^2 ص}{ء ق}}{ء ق} \quad و \\ ع_١ - ع = ح \, خ \dfrac{\frac{ء^2 ع}{ء ق}}{ء ق} \end{array}\right\} \quad (١)$$

في الدائرة الالتصاقية

ب ٣٦ ـ اذا مد من منتصف الوتر م مَ مستو عمودي على هذا الوتر فانه يقطع العمودي م ن في نقطة و وهذه النقطة تكون مركزا لدائرة مارة بالنقطتين م و مَ فاذا تقاربت نقطة مَ من نقطة م فان المستوى يميل الى أن ينطبق على المستوى الالتصاقي ے م ن ونهاية الدائرة تسمى الدائرة الالتصاقية للمنحني في نقطة م

واعلم ان نصف قطر الدائرة الالتصاقية في نقطة م يساوي نصف قطر الانحناء في هذه النقطة

لان معادلة المستوى الممدود بالتعامد على الوتر م مَ من منتصفه هي

$$ف س \left(س_١ - س - \tfrac{١}{٢} ف س\right) + ف ص \left(ص_١ - ص - \tfrac{١}{٢} ف ص\right)$$
$$+ ف ع \left(ع_١ - ع - \tfrac{١}{٢} ف ع\right) = ٠$$

أو $(\text{س}_1-\text{س})\,\text{ف س}+(\text{ص}_1-\text{ص})\,\text{ف ص}$

$$+(\text{ع}_1-\text{ع})\,\text{ف ع}=\frac{1}{2}(\text{ف س}^2+\text{ف ص}^2+\text{ف ع}^2)$$

وبحذف $\text{س}_1-\text{س}$ و $\text{ص}_1-\text{ص}$ و $\text{ع}_1-\text{ع}$ من هذه المعادلة ومعادلات العمودى (أ) يحدث

$$\text{ع خ}\left(\frac{\text{ف}\frac{\text{ف س}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}\,\text{ف س}+\frac{\text{ف}\frac{\text{ف ص}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}\,\text{ف ص}+\frac{\text{ف}\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}\,\text{ف ع}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\text{ف س}^2+\text{ف ص}^2+\text{ف ع}^2)$$

لكن اذا اعتبرت المتغيرات س و ص و ع دوال للمتغير ر يكون

$$\text{ف س}=\text{ف ر}\,\frac{\text{ف س}}{\text{ف ر}}+\frac{\text{ف ر}^2}{2}\left(\frac{\text{ف}\frac{\text{ف س}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}+\text{ل}\right)\quad\text{و}$$

$$\text{ف ص}=\text{ف ر}\,\frac{\text{ف ص}}{\text{ف ر}}+\frac{\text{ف ر}^2}{2}\left(\frac{\text{ف}\frac{\text{ف ص}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}+\text{ے}\right)\quad\text{و}$$

$$\text{ف ع}=\text{ف ر}\,\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ر}}+\frac{\text{ف ر}^2}{2}\left(\frac{\text{ف}\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}+\text{ط}\right)$$

وحروف ل و ے و ط كميات تنعدم حينما ينعدم ف ر

وبوضع هذه المقادير فى المعادلة المتقدمة وحذف الحدود التى تشتمل على ف ر وهى حدود مجموعها معدوم يحدث

$$\text{ع خ}\left[\left(\frac{\text{ف}\frac{\text{ف س}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}\right)^2+\left(\frac{\text{ف}\frac{\text{ف ص}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}\right)^2+\left(\frac{\text{ف}\frac{\text{ف ع}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}\right)^2+\text{ل}\,\frac{\text{ف}\frac{\text{ف س}}{\text{ف ر}}}{\text{ف ر}}+\cdots\cdots\right]$$
$$=\frac{\text{ف س}^2+\text{ف ص}^2+\text{ف ع}^2}{\text{ف ر}^2}$$

وعند النهاية يكون

$$خ \times \frac{1}{خ^2} \times نها\ ح = 1 \quad أو \quad نها\ ح = خ$$

أعنى أن نصف قطر الدائرة الالتصاقيـة فى نقطة م يساوى نصف قطر الانحناء فى هذه النقطة ولذا يقال لنقطة ك التى هى نهاية نقطة ں مركز الانحناء أو مركز الدائرة الالتصاقية

بـ ٢٣٧ د وبمثل ما تقدم يثبت أن نقطة تقابل العمودى الاصلى م ں مع المستوى العمودى المار بنقطة مَ تكون نهايتها نقطة ك أى مركز الانحناء لان معادلة هذا المستوى العمودى هى

$$\left(\frac{ء س}{ء ر} + ف\frac{ء س}{ء ر}\right)(س_1 - س - ف س)$$

$$+\left(\frac{ء ص}{ء ر} + ف\frac{ء ص}{ء ر}\right)(ص_1 - ص - ف ص)$$

$$+\left(\frac{ء ع}{ء ر} + ف\frac{ء ع}{ء ر}\right)(ع_1 - ع - ف ع) = ٠$$

وبتعويض $س_1 - س$ و $ص_1 - ص$ و $ع_1 - ع$ بمقاديرها المستخرجة من المعادلات

$$(١)\quad \begin{cases} س_1 - س = ح خ \dfrac{ء \dfrac{ء س}{ء ر}}{ء ر} ،\quad ص_1 - ص = ح خ \dfrac{ء \dfrac{ء ص}{ء ر}}{ء ر} \ و \\ ع_1 - ع = ح خ \dfrac{ء \dfrac{ء ع}{ء ر}}{ء ر} \end{cases}$$

التى هى معادلات العمودى الاصلى يحدث

$$ح خ \left[\frac{ء \frac{ء س}{ء ر}}{ء ر}\left(\frac{ء س}{ء ر} + ف\frac{ء س}{ء ر}\right) + \frac{ء \frac{ء ص}{ء ر}}{ء ر}\left(\frac{ء ص}{ء ر} + ف\frac{ء ص}{ء ر}\right) + \frac{ء \frac{ء ع}{ء ر}}{ء ر}\left(\frac{ء ع}{ء ر} + ف\frac{ء ع}{ء ر}\right)\right]$$

$$= ف س \frac{ء س}{ء ر} + ف ص \frac{ء ص}{ء ر} + ف ع \frac{ء ع}{ء ر} + ف س\ ف \frac{ء س}{ف ر} + ف ص\ ف \frac{ء ص}{ء ر} + ف ع\ ف \frac{ء ع}{ء ر}$$

وهذه المعادلة تختصر كثيرا بواسطة الملحوظات الآتية وهى

اذا لوحظ أن

$$\frac{\partial س}{\partial ر}\,\partial\frac{\partial س}{\partial ر}+\frac{\partial ص}{\partial ر}\,\partial\frac{\partial ص}{\partial ر}+\frac{\partial ع}{\partial ر}\,\partial\frac{\partial ع}{\partial ر}=٠$$

فانها تؤل بعد القسمة على ف ر الى

$$ع\,خ\left(\frac{\partial\frac{\partial س}{\partial ر}}{\partial ر}\cdot\frac{ف\frac{\partial س}{\partial ر}}{ف ر}+\frac{\partial\frac{\partial ص}{\partial ر}}{\partial ر}\cdot\frac{ف\frac{\partial ص}{\partial ر}}{ف ر}+\frac{\partial\frac{\partial ع}{\partial ر}}{\partial ر}\cdot\frac{ف\frac{\partial ع}{\partial ر}}{ف ر}\right)$$

$$=\frac{ف س}{ف ر}\,\frac{\partial س}{\partial ر}+\frac{ف ص}{ف ر}\,\frac{\partial ص}{\partial ر}+\frac{ف ع}{ف ر}\,\frac{\partial ع}{\partial ر}$$

$$+\frac{ف س}{ف ر}\,ف\frac{\partial س}{\partial ر}+\frac{ف ص}{ف ر}\,ف\frac{\partial ص}{\partial ر}+\frac{ف ع}{ف ر}\,ف\frac{\partial ع}{\partial ر}$$

ولو لوحظ أن

$$\left(\frac{\partial\frac{\partial س}{\partial ر}}{\partial ر}\right)^{٢}+\left(\frac{\partial\frac{\partial ص}{\partial ر}}{\partial ر}\right)^{٢}+\left(\frac{\partial\frac{\partial ع}{\partial ر}}{\partial ر}\right)^{٢}=\frac{١}{خ^{٢}}$$

تكون نهاية الطرف الاول هى $\frac{١}{خ}$ نها ع

ونهاية الطرف الثانى هى

$$\left(\frac{\partial س}{\partial ر}\right)^{٢}+\left(\frac{\partial ص}{\partial ر}\right)^{٢}+\left(\frac{\partial ع}{\partial ر}\right)^{٢}\ \text{أى}\ ١$$

واذن يكون

$$\frac{١}{خ}\ \text{نها}\ ع=١\qquad\text{أو}\qquad\text{نها}\ ع=خ$$

وهذا ما أردنا اثباته

ب ٢٣٨ د بموجب ما تقرر يمكن اعتبار مركز الانحناء فى نقطة م هو نقطة تقاطع المستوى الالتصاقى فى نقطة م بمستويين أصليين أحدهما ممدود من نقطة م والآخر من نقطة قريبة جداً منها

ولاجل تحصيل الاحداثيات ل و لَ و لً لمركز الانحناء ك يمكن تعويض $س_١$ و $ص_١$ و $ع_١$ فى معادلات العمودى بالكميات ل و لَ و لً فبملاحظة ان ع يؤل اذ ذاك الى خ يحدث

$$ل - س = خ^٢ \frac{\frac{ى س}{ى ر}}{ى ر}\ ى \quad ، \quad لَ - ص = خ^٢ \frac{\frac{ى ص}{ى ر}}{ى ر}\ ى \quad ،$$

$$لً - ع = خ^٢ \frac{\frac{ى ع}{ى ر}}{ى ر}\ ى$$

وبهذه المعادلات تتعين ل ، لَ ، لً بدلالة احداثيات نقطة م

في زاوية الالتواء وفي نصف قطر الانحناء الثاني

بـ ٢٣٩ د لتكن ا ، ب ، ح جيوب تمام الزوايا التي يكونها العمود على المستوى الالتصاقي في نقطة م مع المحاور الاحداثية ولتكن و الزاوية الواقعة بين هذا المستوى والمستوى الالتصاقي المجاور له فكما في (بـ ٢٣٣ د) يحدث

$$٢ حا \frac{١}{٢} و = \sqrt{ف ا^٢ + ف ب^٢ + ف ح^٢}$$

وعند النهاية والرمز بحرف ت لما تؤل اليه زاوية و أعني الزاوية الواقعة بين مستويين التصاقين قريبين جدا من بعضهما يحدث

$$ت = \sqrt{ى ا^٢ + ى ب^٢ + ى ح^٢}$$

أو

$$ت = \sqrt{(ى حا ى)^٢ + (ى حا ىَ)^٢ + (ى حا ىً)^٢}$$

و ى ، ىَ ، ىً زوايا ميل العمود على المستوى الالتصاقي للمنحني في نقطة م مع المحاور وس ، وص ، وع وغير ذلك فان

$$حا ى = \frac{ى ص ى^٢ ع - ى ع ى^٢ ص}{أ} \quad ،$$

$$حا ىَ = \frac{ى ع ى^٢ س - ى س ى^٢ ع}{أ} \quad ،$$

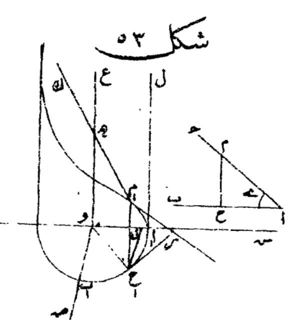
$$حا ىً = \frac{ى س ى^٢ ص - ى ص ى^٢ س}{أ}$$

بند ٤٠ الزاوية الصغيرة جدا ت الواقعة بين مستويين التصاقيين متتاليين تسمى زاوية الالتواء وتسمى انحناء ثانيا أو التواء نسبة ت الى ك ر واذا اعتبر ك ر ثابتا يكون هذا الانحناء مناسبا للزاوية ت

وتبين النسبة $\frac{ت}{ك ر}$ كما في الانحناء الاول بالكسر $\frac{١}{نح}$ بحيث يكون نح $= \frac{ك ر}{ت}$ وتسمى الكمية نح نصف قطر الانحناء الثانى أو نصف قطر الالتواء

في تعريف المنحنى البريمى وفي معادلاته

بند ٤١ متى لف مستوى زاوية مثل ح ا ب = ى على اسطوانة قائمة و إ ب ل قاعدتها دائرة بحيث ينطبق الضلع أ ب على المحيط إ ب بالضبط فان المنحنى الذى يلتف على حسبه الضلع ا ح يسمى منحنيا بريميا



بند ٤٢ لنجعل المستقيم و إ المار بنقطة و التى هى مبدأ المنحنى البريمى محور السينات ونجعل العمود المقام على و س فى مستوى القاعدة من المركز محور الصادات ثم نجعل محور الاسطوانة محور العينات فيكون

$$س = نق حتا ن \quad و \quad ص = نق حا ن \quad و \quad ع = م نق ن \qquad (١)$$

لان

$$ع = م ح = ح آ طا ى = قوس ا ح × طا ى = م نق ن$$

وبحذف ن من المعادلات (١) توجد معادلتا المنحنى البريمى وهما

$$س = نق حتا \frac{ع}{م نق} \quad و \quad ص = نق حا \frac{ع}{م نق}$$

الا ان الاصوب استعمال المعادلات (١) مع المتغير المساعد ن

فى المماس للمنحنى البريمى

بند ٤٣٢ جيوب تمام زوايا ميل المماس م ن فى نقطة م (س و ص و ع) على المحاور هى

$$\frac{ء س}{ء ن} \text{ ، } \frac{ء ص}{ء ن} \text{ و } \frac{ء ع}{ء ن} \quad \text{لكن}$$

$$ء س = - ى حا ى ء ى \quad \text{،} \quad ء ص = ى حتا ى ء ى \quad \text{و}$$

$$ء ع = م ى ء ى \quad \text{،} \quad ء ن = ى \sqrt{١ + م^٢} \; ء ى$$

واذن يكون

$$\frac{ء س}{ء ن} = \frac{- حا ى}{\sqrt{١ + م^٢}} \quad \text{،} \quad \frac{ء ص}{ء ن} = \frac{حتا ى}{\sqrt{١ + م^٢}} \quad \text{و}$$

$$\frac{ء ع}{ء ن} = \frac{م}{\sqrt{١ + م^٢}}$$

ومن القانون $\frac{ء ع}{ء ن} = \frac{م}{\sqrt{١ + م^٢}} = حا ى$ يتضح ان المماس م ن يكون مع الرواسم زاوية ثابتة تساوى متممة الزاوية ـ وبناء عليه تكون زاوية ميله على مستوى قاعدة الاسطوانة ثابتة أيضا ومساوية للزاوية ـ

وبالتأمل يرى ان $\frac{ء ص}{ء س} = - \frac{حتا ى}{حا ى} = - \frac{١}{طا ى}$ و $\frac{ء ص}{ء س}$ المعامل الزاوى للمستقيم ع ن و طا ى المعامل الزاوى للمستقيم و ع فاذن يكون هذان المستقيمان متعامدين على بعضهما وعليه يكون مسقط المماس على المستوى س ص مماسا فى نقطة ع لقاعدة الاسطوانة

فى نصف قطر الانحناء ومركزه

بند ٤٤٢ نصف قطر الانحناء فى نقطة م معلوم بالقانون

$$نق = \frac{١}{\sqrt{\left(ء \frac{ء س}{ء ن} \Big/ ء ن\right)^٢ + \left(ء \frac{ء ص}{ء ن} \Big/ ء ن\right)^٢ + \left(ء \frac{ء ع}{ء ن} \Big/ ء ن\right)^٢}}$$

لكن من القوانين التي وجدت في البند المتقدم يستنتج

$$\frac{\frac{ء س}{ء ى}}{ء ى} = -\frac{حتا ى}{ى(١+م^٢)} ، \frac{\frac{ء ص}{ء ى}}{ء ى} = -\frac{حا ى}{ى(١+م^٢)} ، \frac{\frac{ء ع}{ء ى}}{ء ى} = ٠$$

واذن يكون

$$خ = \frac{١}{\sqrt{\frac{حتا^٢ى + حا^٢ى}{ى^٢(١+م^٢)^٢}}} = ى(١+م^٢)$$

ومن هنا يعلم ان نصف قطر الانحناء مقداره ثابت في جميع نقط المنحني البريمي

ب ٢٤٥ د العمودي الاصلي للمنحني البريمي في نقطة $م_١$ يكون مع المحاور زوايا جيوب تمامها مناسبة للتفاضلات $ء\frac{ء س}{ء ى}$ ، $ء\frac{ء ص}{ء ى}$ ، $ء\frac{ء ع}{ء ى}$ أو الى حتا ى و حا ى و صفر

ومن هنا يعلم ان هذا المستقيم موازٍ للمستقيم و ح واذن يكون نصف قطر الانحناء متجها في اتجاه نصف قطر الاسطوانة والمستقيم م ڡ العمود على المحور والمماس $م_١$ ر يعينان المستوى الالتصاقي ولو أخذ ڡ ك = $م^٢$ى لكانت نقطة ك مركز انحناء المنحني البريمي في نقطة م

وحيث كان مقدار نصف قطر الانحناء ثابتا وأكبر دائما من نصف قطر الاسطوانة فينتج من ذلك ان مسار مراكز انحناء المنحني البريمي منحن بريمي آخر خطوته كخطوة الاول الا انه في جهة عكسية

ب ٢٤٦ د متى تحركت نقطة $م_١$ على المنحني البريمي يرسم المستقيم م ڡ سطحا مخروطيا يسمى سطحا بريميا شماليا ويكون المستوى ڡ $م_١$ ر مماسا لهذا السطح في نقطة م حيث انه يمر بالراسم المستقيم م ڡ وبالمماس م ر للمنحني البريمي الموضوع على هذا السطح ولاجل تحصيل معادلة هذا السطح يكفي حذف ى من المعادلتين

$$ع = م ى ى \quad ، \quad ص = س طا ى$$

الدالتين على المستقيم $م_١$ ڡ وبذلك توجد هذه المعادلة

$$ص = س طا \frac{ع}{م ى}$$

فى المستوى الالتصاقى وفى زاوية الالتواء ونصف قطره

٢٤٧ نعلم أن

$$\text{د س} = -\text{س حا ن د ن} \quad , \quad \text{د ص} = \text{س حتا ن د ن} \quad , \quad \text{د ع} = \text{م س د ن} \quad ,$$

$$\text{د}^2\text{س} = -\text{س حتا ن د ن}^2 \quad , \quad \text{د}^2\text{ص} = -\text{س حا ن د ن}^2 \quad , \quad \text{د}^2\text{ع} = ٠$$

واذن يكون

$$\text{د س د}^2\text{ص} - \text{د ص د}^2\text{س} = \text{س}^2\text{ د ن}^3 \quad ,$$

$$\text{د ع د}^2\text{س} - \text{د س د}^2\text{ع} = -\text{م س}^2\text{ حتا ن د ن}^3 \quad ,$$

$$\text{د ص د}^2\text{ع} - \text{د ع د}^2\text{ص} = \text{م س}^2\text{ حا ن د ن}^3$$

وحينئذ تكون معادلة المستوى الالتصاقى هى

$$\text{م حا ن}\left(\text{س}_1 - \text{س}\right) - \text{م حتا ن}\left(\text{ص}_1 - \text{ص}\right) + \text{ع}_1 - \text{ع} = ٠$$

وذلك بالقسمة على العامل المشترك $\text{س}^2\text{ د ن}^3$

٢٤٨ اذا رمز بحرف ت لزاوية الالتواء يعلم أن

$$\text{ت} = \sqrt{\left(\text{د حتا ى}\right)^2 + \left(\text{د حتا ى}'\right)^2 + \left(\text{د حتا ى}''\right)^2}$$

و ى و ى' و ى'' الزوايا التى يكونها العمود المقام من نقطة م على المستوى الالتصاقى مع المحاور وحيث ان

$$\text{حتا ى}'' = \frac{1}{\sqrt{1+\text{م}^2}} \quad , \quad \text{حتا ى}' = -\frac{\text{م حتا ن}}{\sqrt{1+\text{م}^2}} \quad , \quad \text{حتا ى} = \frac{\text{م حا ن}}{\sqrt{1+\text{م}^2}}$$

فيكون

$$\text{د حتا ى}'' = ٠ \quad , \quad \text{د حتا ى}' = \frac{\text{م حا ن د ن}}{\sqrt{1+\text{م}^2}} \quad , \quad \text{د حتا ى} = \frac{\text{م حتا ن د ن}}{\sqrt{1+\text{م}^2}}$$

واذن يكون $\text{ت} = \sqrt{\frac{\text{م}^2\text{حا}^2\text{ن}}{1+\text{م}^2} + \frac{\text{م}^2\text{حتا}^2\text{ن}}{1+\text{م}^2}}\ \text{د ن} = \frac{\text{م د ن}}{\sqrt{1+\text{م}^2}}$

ويكون $\frac{\text{ت}}{\text{د ى}} = \frac{\text{م د ن}}{\sqrt{1+\text{م}^2}} : \text{س}\sqrt{1+\text{م}^2}\ \text{د ن} = \frac{\text{م}}{1+\text{م}^2} \cdot \frac{1}{\text{س}}$

وبناء على هذا يكون الانحناء الثانى ثابتا كالاول

الفصـــــــل التـاسع

فى النقط الممتازة للمنحنيات المســــتوية

تعريف النقط الممتازة للمنحنيات المستوية وفى نقط الانقلاب

بند ٢٤٩ النقط الممتازة لمنحنٍ هى نقط لها امتياز مخصوص بها لا يتعلق بوضع المنحنى بالنسـبة لمحورى الاحداثيات ولا نتكلم الا على النقط الممتازة للمنحنيات المستوية

وحيث انا قد تكلمنا فى (بند ١٥٨) على نقط الانقلاب فنورد الآن بعض امثلة لها فنقول

بند ٢٥٠ لنفرض المنحنى الجيبى الذى معادلته

$$ص = حاس$$

فحينما يكون س = ٠ وعلى العموم حينما يكون س = ± م ط (م عـدد صحيح) يكون ص = ٠ وبناء على ذلك يقابل المنحنى محور السينات فى نقط لانهائيـة العدد تحصل بأخـذ أطوال مساوية لطول نصف المحيط على هـذا المحور بالابتداء من نقطة الاصل فى كل من الجهتين ويتركب المنحنى من اجزاء متطابقة لانهائية العدد الا غير انها توجـد بالتعاقب فوق محور السينات وتحته والرأسـيات الكبرى والصـغرى المساوية فى المقدار المطلق للوحـدة تطابق الافقيات $\frac{ط}{٢}$ و $\frac{٣ط}{٢}$ و $\frac{٥ط}{٢}$ و .... ومن معادلة المنحنى يستخرج

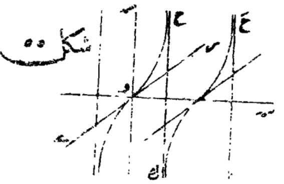
$$\frac{ءص}{ءس} = حاس \quad و \quad \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = -حاس$$

والمشـتقة برتبـة ثانية تنعدم وتتغير اشارتها بالمقـدار س = ± م ط وبناء عليه تكون النقط و و ه و ... التى يتقابل فيها المنحنى بمحور السينات نقط انقـلاب وحيث انه بالمقـدار س = ± م ط تكون المشتقة برتبة أولى مساوية للمقدار ± ١ فيكون المماس فى هذه النقط مائلا على الدوام بقدر ٤٥° أو بقدر ١٣٥° على محور السينات

بند ٢٥١ ولنعتبر المنحنى

$$ص = ظا س$$

فحينما يكون س = ٠ وعلى العموم حينما يكون س = ± م ط يكون ص = ٠ وحينئذ يتقابل المنحنى مع محور السينات فى نقطة الاصل ونقط أخرى لانهاية لعددها متساوية الابعاد عن بعضها وحينما يكون $س = \frac{ط}{٢}$ يكون ص = ∞ واذا أخذ س أقل قليلا من $\frac{ط}{٢}$ يكون ظا س كبيرا جدا وموجبا واذا كان الافقى أكبر قليلا من $\frac{ط}{٢}$ يكون ظا س كبيرا جدا غير انه يكون سالبا



وحينئذ يكون المستقيم الذى معادلته $س = \frac{ط}{٢}$ تقريبا للمنحنى وغير ذلك يشاهد ان المنحنى يمتد الى مالانهاية فى جهتى محور الصادات ويتركب من فروع متطابقة لانهاية لعددها وبأخذ التفاضل يحدث

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{حتا^٢ س} ، \frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = \frac{٢ حتا س حا س}{حتا^٤ س} = \frac{٢ حا س}{حتا^٣ س}$$

واذا وضع $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢} = ٠$ يوجد ان جميع نقط تلاقى المنحنى مع محور السينات نقط انقلاب

فى النقط المضاعفة

بند ٢٥٢ النقطة المضاعفة هى نقطة يمر بها جملة فروع لمنحن واحد والخاصية المميزة للنقطة المضاعفة هى أن المنحنى يكون له فيها جملة مماسات ولنضرب صفحا عن الحالة التى تؤول فيها هذه المماسات الى مماس واحد فقط وهاك مثالا فيه ص دالة محلولة للمتغير س فلتكن

$$ص = ء(س) ± (س - ح)(س - ء)^{\frac{ع}{ك}}$$

والكسر $\frac{ع}{ك}$ غير قابل للاختصار ومقامه ك زوجى فالحد $(س - ح)(س - ء)^{\frac{ع}{ك}}$ له مقداران حقيقيان ومختلفان فى الاشارة بكل مقدار من مقادير س الموافقة وهذا ما بيناه بوضع ± امام هذا الحد

ومن هذه المعادلة يستخرج

$$\frac{ء ص}{ء س} = د'(س) \pm (س - ى)^{\frac{ع}{ك}} \pm \frac{ع}{ك} (س - ح)(س - ى)^{\frac{ع}{ك} - 1}$$

وحينما يكون $س = ح$ يكون

$$ص = د(ح) \quad , \quad \frac{ء ص}{ء س} = د'(ح) \pm (ح - ى)^{\frac{ع}{ك}}$$

وبفرض $ح > ى$ يوجد مماسان متميزان وغير ذلك فانه يطابق لمقادير $س$ المخالفة للعدد $ح$ اختلافا يسيرا مقداران حقيقيان ومتميزان للدالة $ص$ يؤلان الى مقدار واحد حينما يكون $س = ح$ واذن تكون النقطة التى احداثياها $س = ح$ و $ص = د(ح)$ نقطة مزدوجة

وأما اذا كان $ح < ى$ فان $\frac{ء ص}{ء س}$ تكون تخيلية ولا يكون للمنحنى مماس فى هذه النقطة وفى الواقع حيث انه بمقادير $س$ المخالفة للعدد $ح$ يكون $س - ى$ سالبا فتكون الرأسيات المطابقة لها تخيلية وحينئذ فلا توجد نقط للمنحنى بالقرب من النقطة المعتبرة وسنتكلم فيما بعد ان شاء الله تعالى على نوع النقط الممتازة هذا

٢٥٣ـد ولنفرض الآن أن معادلة المنحنى وهى

$$د(س \text{ و } ص) = ٠ \qquad (١)$$

غير محلولة بالنسبة للدالة $ص$ فنها يستخرج بأخذ التفاضل

$$\frac{ء د}{ء س} + \frac{ء د}{ء ص} \frac{ء ص}{ء س} = ٠ \qquad (٢)$$

وفى أى نقطة مضاعفة من المنحنى يجب أن يكون للمشتقة $\frac{ء ص}{ء س}$ جملة مقادير حقيقية ومتميزة وحيث كانت المعادلة (٢) بدرجة أولى بالنسبة للمشتقة $\frac{ء ص}{ء س}$ فلا يمكن أن يحصل ذلك الا اذا كان

$$\frac{ء د}{ء س} = ٠ \quad , \quad \frac{ء د}{ء ص} = ٠ \qquad (٣)$$

فى آن واحد ومن هنا يعلم أنه لاجل تحصيل النقط المضاعفة يلزم أن يبتدأ بالبحث عن النقط التى احداثياتها تحقق المعادلات (١) و (٣)

وحيث ان المعادلة (٢) تؤل اذ ذاك الى ٠ = ٠ فلا يمكن أن تعين مقدار $\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}$ و يلزم استعمال هذه المعادلة التفاضلية وهى

$$\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك س}^2}+2\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك س ك ص}}\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}+\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك ص}^2}\left(\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}\right)^2+\frac{\text{ك د}}{\text{ك ص}}\frac{\text{ك}^2\text{ص}}{\text{ك س}^2}=0$$

و بملاحظة أن $\frac{\text{ك د}}{\text{ك ص}}=0$ تؤل هذه المعادلة الى

$$\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك س}^2}+2\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك س ك ص}}\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}+\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك ص}^2}\left(\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}\right)^2=0 \qquad (٤)$$

ولنفرض أن الثلاثة معاملات $\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك س}^2}$ و $\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك س ك ص}}$ و $\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك ص}^2}$ لا تكون كلها معدومة وان المعادلة (٤) تعطى مقدارين حقيقيين ومتميزين للمشتقة $\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}$ فبهذا الفرض يعلم أنه يوجد مماسان فى النقطة المعتبرة وبناء على ذلك يمر منها فرعان للمنحنى وحينئذ تكون نقطة مزدوجة

لكن اذا تقابلت ثلاثة فروع للمنحنى فى هذه النقطة فمن الواجب أن يكون لها فيها ثلاثة مماسات ولكون ان المعادلة (٤) التى ليست الا بدرجة ثانية بالنسبة للمشتقة $\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}$ لا يمكن ان تعطى ثلاثة مقادير لهذه الكمية فيلزم فى آن واحد ان يكون

$$\frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك س}^2}=0 \quad \text{و} \quad \frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك س ك ص}}=0 \quad \text{و} \quad \frac{\text{ك}^2\text{د}}{\text{ك ص}^2}=0$$

وتحصل مقادير $\frac{\text{ك ص}}{\text{ك س}}$ بأخذ تفاضل المعادلة (٤) وهاهى كيفية العمل حيثما تمر جملة فروع بالنقطة (س و ص)

بند ٢٥٤ ولنمثل بالمنحنى الذى معادلته

$$\text{ط}^2=\text{س}^2(1-\text{س}^2) \quad \text{أو} \quad \text{ص}=\pm\,\text{س}\sqrt{1-\text{س}^2}$$

فهذا المنحنى متماثل بالنسبة لمحور السينات ولمحور الصادات ويقطع الاول فى نقطة الاصل وفى نقطتين أفقياهما $\text{س} = 1$ و $\text{س} = -1$

وبأخذ تفاضل معادلة المنحنى يوجد

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \pm\sqrt{1-\text{س}^2} \mp \frac{\text{س}^2}{\sqrt{1-\text{س}^2}} = \pm\frac{1-2\text{س}^2}{\sqrt{1-\text{س}^2}}$$

وحينما يكون $\text{س} = 0$ يؤل مقدارا ص الى مقدار واحد وهو صفر وغير ذلك فانه فى هذه النقطة يكون

$$\frac{d\text{ص}}{d\text{س}} = \pm 1$$

واذن تكون نقطة الاصل نقطة مزدوجة وفى هذه النقطة يكون المماسان ر رَ و ط طَ قاسمين لزاويتى المحورين الى قسمين متساويين ويوجد أن المشتقة برتبة ثانية هى

$$\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = \pm\frac{\frac{\text{س}(1-2\text{س}^2)}{\sqrt{1-\text{س}^2}} - 4\text{س}\sqrt{1-\text{س}^2}}{(1-\text{س}^2)} = \pm\frac{2\text{س}^3-3\text{س}}{(1-\text{س}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

وحينما يكون $\text{س} = 0$ يكون $\frac{d^2\text{ص}}{d\text{س}^2} = 0$ واذن تكون نقطة الاصل نقطة مزدوجة ونقطة انقلاب فى آن واحد

فى نقط الرجوع

بند ٢٥٥ نقطة الرجوع هى نقطة ينتهى بها فرعا منحن وفيها يكون لهما مماس مشترك ويلزم فى هذه الحالة ان يصير مقداران حقيقيان للمتغير ص متى كان س أكبر أو أصغر من أفقى النقطة تخيليين متى كان س أصغر أو أكبر من هذا الافقى وان يصير مقداران للمشتقة $\frac{d\text{ص}}{d\text{س}}$ متساويين

ويقال للرجوع من النوع الاول أو من النوع الثانى بحسب ما يكون الفرعان فى جهتين مختلفتين من المماس كما فى (شكل ٥٨) أو فى جهة واحدة من المماس المشترك لهما كما فى (شكل ٥٧)

وبموجب ماشاهدناه فى تحديب المنحنيات المستوية (بـ ٢٥٧ د) يعلم نوع الرجوع باشارة $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

على الفرعين بالقرب من النقطة المعتبرة

بـ ٢٥٦ د فليكن المنحنى

$$ص = د(س) \pm (س - ح)^{\frac{ع}{ك}} د_١(س)$$

و $د(س)$ و $د_١(س)$ دالتان حقيقيتان محدودتان بمقادير س القريبة من ح ولنفرض ان الكسر $\frac{ع}{ك}$ موجب وغير قابل للاختصار وان مقامه زوجى فبكل مقدار للمتغير س أكبر من ح يكون للحد $(س - ح)^{\frac{ع}{ك}} د_١(س)$ مقداران حقيقيان متساويان ومختلفان فى الاشارة وهو ما بيناه بوضع $\pm$ امام هذا الحد

ومقدارا ص الحقيقيان والغير متساويين بكل مقدار للمتغير س أكبر من ح يصيران متساويين حينما يكون $س = ح$ وتخيليين حينما يكون $س < ح$ واذن يجتمع فرعا المنحنى ويقفان فى النقطة التى احداثياها $س = ح$ و $س = د_١(ح)$

ويلزم علينا الآن ان نعرف هل للفرعين فى هذه النقطة مماس مشترك أم لا فمن معادله المنحنى يستخرج

$$\frac{د ص}{د س} = د'(س) \pm \frac{ع}{ك}(س - ح)^{\frac{ع}{ك}-١} د_١(س) \pm (س - ح)^{\frac{ع}{ك}} د_١'(س)$$

فاذا كان $\frac{ع}{ك} > ١$ فانه يطابق للمقدار $س = ح$ المقدار الواحد $د'(ح)$ للمشتقة وحيث كان للفرعين مماس مشترك فى النقطة المعتبرة فتكون هذه الاخيرة نقطة رجوع

ولاجل معرفة ان كانت نقطة الرجوع من النوع الاول أو من النوع الثانى يحسب $\frac{د^٢ ص}{د س^٢}$

فيوجد أن

$$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = د''(س) \pm \frac{ع}{ك}\left(\frac{ع}{ك} - ١\right)(س - ح)^{\frac{ع}{ك}-٢} د_١(س)$$

$$\pm ٢ \frac{ع}{ك}(س - ح)^{\frac{ع}{ك}-١} د_١'(س) \pm (س - ح)^{\frac{ع}{ك}} د_١''(س)$$

ونفرض هنا فرضين الاول اذا كان $\frac{ع}{ل} - ٢ > ٠$ فانه بالمقدار $س = ح$ تكون
$\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = ى''(ح)$ وحينئذ اذا لم يكن $ى''(ح)$
معدوما تكون $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ لها اشارة واحدة على
الفرعين وبناء عليه يكون للمنحنى رجوع
من النوع الثاني كما في شكل ٥٧

شكل ٥٧

الثاني اذا كان $\frac{ع}{ل} - ٢ < ٠$ فانه بكل
مقدار للمتغير س اكبر من ح قليلا يكون الحد

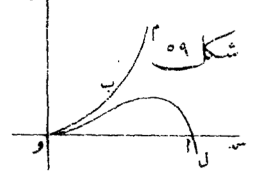
$$\frac{ع}{ل}\left(\frac{ع}{ل}-١\right)(س-ح)^{\frac{ع}{ل}-٢}\, ى_{١}(س) \qquad (١)$$

كبيرا جدا باعتبار المقدار المطلق ولا يحصل ذلك للحدود الأخر من $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ فانها تقرب كلها
ماعدا $ى''(س)$ من الصفر متى مال س
الى ح وحينئذ تكون اشارة $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$
كاشارة الحد (١) وحيث كان لهذا الحد
اشارة مزدوجة فيعلم من ذلك انه في النقطة
$[س = ح \text{ و } ص = ى(ح)]$ يكون
الفرعان موجودين احدهما في جهة من
المماس المشترك وآخرهما في الجهة الاخرى
وفي هذه الحالة يكون الرجوع من النوع الاول كما يشاهد في (شكل ٥٨)

شكل ٥٨

٢٥٧ ـ د ولنفرض المنحنى

$$ص = س^{٢} \pm س^{\frac{٥}{٢}}$$



فبكل مقدار موجب للمتغير س يوجد
مقداران حقيقيان للرأسي ص يصيران
متساويين حينما يكون $س = ٠$ وليس
للمنحنى نقط جهة الافقيات السالبة وأما في

جهة السينات الموجبة فان له فرعين يمتدان الى مالانهاية احدهما جهة الصادات الموجبة وآخرهما جهة الصادات السالبة قاطعا المحور السينات فى النقطة التى افقيها يساوى ١ ونهاية النسبة $\frac{ص}{س}$ صفر حينما يكون س = ٠ ومتى كان للمتغير س مقدار موجب صغير جدا يكون مقدارا ص المطابقان له موجبين كذلك وحينئذ يكون للفرعين مماس مشترك فى نقطة و ويكونان موجودين بالقرب من هذه النقطة فى جهة واحدة من هذا المماس واذن تكون نقطة الاصل نقطة رجوع من النوع الثانى

ويتحصل أيضا على هذه النتيجة بواسطة مقدارى $\frac{ى ص}{ى س}$ و $\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢}$ وهما

$$\frac{ى ص}{ى س} = ٢ س \pm \frac{٥}{٢} س^{\frac{٣}{٢}} \quad ,$$

$$\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢} = ٢ \pm \frac{١٥}{٤} س^{\frac{١}{٢}}$$

فبينما يكون س = ٠ يكون $\frac{ى ص}{ى س} = ٠$ ويكون $\frac{ى^٢ ص}{ى س^٢} > ٠$ وحينئذ تكون نقطة و نقطة رجوع من النوع الثانى

فى النقط المنفردة

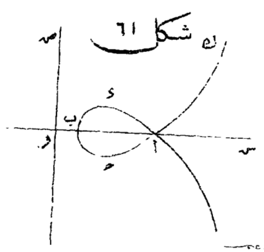
بـ٢٥٨ د النقطة المنفردة هى نقطة احداثياها يحققان معادلة المنحنى بدون أن يمر بها فرع من فروعه فلتكن المعادلة

$$ص = \pm (س - ح) \sqrt{س - ى}$$

ولنفرض فى أول الامر أن ح > ى فبينما يكون س = ى يكون ص = ٠ وبذا توجد نقطة ب على محور السينات واذا تزايد س من ى الى + ∞ يتزايد ص من ٠ الى ± ∞ ويتحصل فرع مثل م ب ل واذا جعل س > ى يصير الرأسى تخيليا الا متى كان س = ح لانه بمقدار س هذا يكون ص = ٠ واذن تكون نقطة ا (س = ح , ص = ٠) نقطة منفردة

شكل ٦٠

واذا كان ح > ء فان المنحنى لا يكون له نقطة منفردة لان مقدارا ص يكونان حقيقيين متى كان س محصورا بين ء و ح وحينما يكون س = ح يؤل مقدارا ص الى ٠ ومن س = ح الى س = ∞ يتزايد ص الى ما لا نهاية وفى هذه الحالة يمر الفرعان ب ح ك و ب ء ل بنقطة ا وحينئذ تكون هذه النقطة نقطة مزدوجة



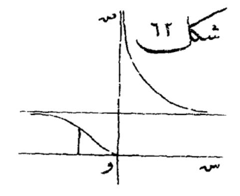
فى نقطة الوقوف

بند ٢٥٩ نقطة الوقوف هى نقطة يقف فيها فرع من منحن دفعة واحدة فلنعتبر المنحنى الذى معادلته

$$ص = هـ^{\frac{1}{س}}$$

فحينما يكون س = ٠ يكون ص = ∞ واذا زيد س الى + ∞ يتناقص ص من + ∞ الى + ١ وبذا يحدث فرع تقربى لمحور الصادات وللمستقيم الذى معادلته

ص = ١



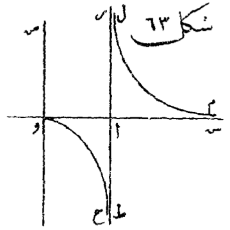
واذا اعتبرت الآن مقادير سالبة للمتغير س فان مقدار $ص = \frac{1}{هـ^{\frac{1}{س}}}$

وحينما يكون س = ٠ يكون ص = ٠ واذن يمر المنحنى بنقطة الاصل ثم يأخذ الرأسى فى الزيادة كلما زاد المقدار المطلق للمتغير س الى المقدار ص = ١ وبذلك يوجد فرع آخر تقربى للمستقيم الذى معادلته ص = + ١ ويقف دفعة واحدة فى نقطة الاصل آتيا من السينات السالبة واذن تكون نقطة الاصل نقطة وقوف

بند ٢٦٠ ولنفرض المنحنى

$$ص = \frac{1}{لو س}$$

فهنا لا يمكن اعطاء س مقادير سالبة لان لو س يصير تخيليا واذا اعطى للمتغير س مقادير موجبة كبيرة جدا يصير الرأسي صغيرا جدا وسالبا و يأخذ مقداره المطلق فى الازدياد كلما زاد س الى ان يكون س = ١ ويؤل الى − ∞ حينما يكون س = ١ واذن يوجد فرع من المنحنى يبتدئ من نقطة الاصل و يكون تقريبا جهة الصادات السالبة للمستقيم الذى معادلته س = ١ واذا زاد س بالابتداء من ١ الى ∞ يصير ص موجبا و يتناقص هذا الرأسي الذى يكون فى أول الامر كبيرا جدا الى أن يؤل الى الصفر و بذلك يوجد الفرع ل م وفى هذا المثال نقطة الاصل نقطة وقوف



فى النقطة البارزة أو الزاوية

بند ٢٦١ لنفرض المنحنى

$$ص = \frac{س}{١ + هـ^{\frac{١}{س}}}$$

فحينما يكون س = ٠ يكون ص = ٠ وتكون نقطة الاصل نقطة من نقط المنحنى فاذا جعلنا س = ٠ فى المقدار $\frac{ص}{س} = \frac{١}{١ + هـ^{\frac{١}{س}}}$ تكون نها $\frac{ص}{س} = ٠$ ومن ذلك يعلم ان الفرع و ن مماس فى نقطة و للمحور و س

وغير ذلك اذا جعل س = − ع يكون $\frac{ص}{س} = \frac{١}{١ + هـ^{-\frac{١}{ع}}}$ وحينما يكون س = − ع = ٠ يكون

$$نها \frac{ص}{س} = ١$$

وحينئذ يكون المماس فى نقطة و للفرع و ط الموجود جهة السينات السالبة هو المستقيم و م المنصف لزاوية المحورين

شكل ٦٤

ونقطة و التى ينتهى فيها فرعا منحن لكل منهما مماس متميز فى هـذه النقطة تسمى نقطة زاوية أو نقطة بارزة

ب ٢٦٢ د والبحث عن النقط الممتازة يستدعى الاختبار الجيد لصورة المنحنى بمجاورة النقطة التى يقع بها المقدار الجبرى للمشتقة $\frac{\partial ص}{\partial س}$ فى حالة من الاحوال التى بيناها فى هـذا الفصل لانه قد يتأتى أن يكون $\frac{ف ص}{ف س}$ تخيليا على الدوام بالقرب من هذه النقطة وأن يكون $\frac{\partial ص}{\partial س}$ حقيقيا فى النقطة المذكورة

يقول خادم تصحيح العلوم بدار الطباعة الزاهية الزاهرة ببولاق مصر القاهرة الفقير
الى الله تعالى محمد الحسينى اعانه الله على أداء واجبه الكفائى والعينى

أما بعد حمد الله على آلائه والصلاة والسلام على خير أنبيائه فقد تم طبع الجزء الاول من هذا
الكتاب البديع حسن الوضع والصنيع الآتى من حساب التفاضل والتكامل الذى هو من
أشرف الاعمال الحسابية بنفائسه والحالى لخطاب الحسان جميل عرائسه كتاب يالله من كتاب
يأخذ بيد قارئه حتى يهديه سبيل الصواب جمع من رقائق هذا الفن أشتاتها وملأ من
مخدراته خدورها وأبياتها تأليف حضرة الصنع الماهر وغيقة الجهبذ الالمعى الباهر الذى حاز
من هذا الفن نوابغه ولبس من طراز حلله البديعة سوابغه من عليه المعول فى هذا الشان فى
المبدا والمآل حضرة أحمد افندى كمال ولما عرضت عرائسه على نقاد المعارف وعشاق
اللطائف رأوا أن تكثير أشخاصه بطبعه رغبة فى عموم نفعه من أهم المهمات وأنجح
الرغبات فأمروا بذلك وشرع فيه بمطبعة المعارف ثم أحيل اكمال طبعه على مطبعة بولاق ذات
المحاسن الباهرة والثمار اليانعة والظل الوارف فكمل طبع الجزء الاول وهو حساب التفاضل
على هذا الشكل الجميل والهيكل البهى الجليل ويليه ان شاء الله تعالى الجزء الثانى
وهو حساب التكامل على أحسن حال وأبهج منوال فى ظل الحضرة
الفخيمة الخديوية وعهد الطلعة البهية المهيبة التوفيقية حضرة
من أفاض على رعيته غيث احسانه وعمهم بزائد عدله وهنى
امتنانه ولى نعمتنا على التحقيق أفندينا محمد باشا توفيق
أدام الله لنا أيامه ووالى علينا انعامه سنة خمس
بعد ثلثمائة وألف من هجرة من خلقه
الله على أكمل وصف عليه وعلى
آله وصحبه أفضل الصلاة
والسلام ما فاح
مسك ختام

تم





كتاب

حسابى التفاضل والتكامل

تأليف

حضرة احمد افندى كمال

مدرس فرع الجبريات بمدرسة المهندسخانه الخديويه

الجزء الثانى

في حساب التكامل

قدقرر مجلس المعارف الاعلى بجلسته المنعقدة في يوم الثلاث المبارك الموافق ٤ اكتوبر سنة ١٨٨١ افرنكيه (١٠ ذى القعده سنة ١٢٩٨ هجريه) لزوم طبع هذا الكتاب واستعماله لتلامذة مدرسة المهندسخانه الخديويه

(الطبعة الاولى)

بالمطبعة الكبرى الاميريه ببولاق مصر المحميه



(بسم الله الرحمن الرحيم)

الباب الاول

فى حساب تكامل الدوال

الفصل الاول

فى الطرق المختلفة لحساب التكامل

بـ١ـد اذا علمت دالة ذات متغير واحد فانه يمكن دائما اعتبارها مشتقة لدالة أخرى مجهولة والبحث عن هذه الدالة الاخرى التى تفاضلها الدالة المعلومة مضروبة فى تفاضل المتغير الغير متعلق ولتكن د(س) الدالة المعلومة فأقول انه يوجد دائما دالة تفاضلها د(س) ٥س لاننا اذا رسمنا المنحنى حم د الذى معادلته

ص = د (س)

بالنسبة لمحورين متعامدين على بعضهما فان مساحة هذا المنحنى المحصورة بين رأسى ثابت حيثما اتفق وليكن حا والرأسى مع المطابق للافقى المتغير س تكون دالة للمتغير س وحيث ان تفاضل هذه المساحة هو ص ٥س أى د(س) ٥س فاذن تكون هذه المساحة دالة تفاضلها د(س) ٥س وتكون د(س) مشتقة لها

شكل ١

بـ٢ـد يطلق اسم تكامل د (س) ٥س ويستدل عليه بالرمز ∫ د (س) ٥س على الدالة التى تفاضلها د(س) ٥س والعملية التى يتوصل بها من تفاضل دالة الى هذه الدالة تسمى عملية أخذ التكامل أو حسابه

ويؤخذ من هذا التعريف ان عمليتي أخذ التكامل وأخذ التفاضل عمليتان متضادتان بحيث انه اذا وجدت العلامتان ء و $\int$ بجوار بعضهما محو بعضهما بعضا مثلا

$$ء \int د(س)\, ء س = د(س)\, ء س \quad و$$

$$\int ء\, د_{١}(س) = د_{١}(س)$$

بـ٣ـد يمكن أن يكون لتكامل تفاضل معلوم مثل $د(س)\, ء س$ مقادير لانهاية لعددها لانه لو علمت دالة ولتكن $د_{١}(س)$ وكان تفاضلها $د(س)\, ء س$ فباضافة ثابت اختياري لهذه الدالة يكون المتحصل وهو $د_{١}(س) + ث$ تفاضله التفاضل $د(س)\, ء س$ بعينه لكن لايكون هنالك دوال أخرى اذ أن كل دالتين تفاضلاهما متساويان لايمكن ان تختلفا عن بعضهما الابكمية ثابتة

وبناء على هذا يكون التكامل العمومي للدالة التفاضلية $د(س)\, ء س$ هو

$$د_{١}(س) + ث$$

وحرف ث رمز لثابت اختياري ومن الشكل يتضح اعتبار هذا الثابت الاختياري لانه لوجعل حَ أَ رأسيا ثابتا بدلا عن ح ا توجد المساحة حَ أَ م ع التي تزيد عن المساحة ح ا م ع بالمساحة الثابتة حَ أَ ا ح

في حساب تكامل حاصل ضرب تفاضل في عامل ثابت

بـ٤ـد كما أنه يمكن وضع عامل ثابت مثل ح خارج علامة التفاضل يمكن كذلك وضعه خارج علامة التكامل

لان

$$ء\, ح ن = ح\, ء ن \quad ,$$

$$\int ء\, ح ن = ح ن \quad , \quad ح \int ء ن = ح ن$$

واذن يكون

$$\int ء\, ح ن = ح \int ء ن \quad أو \quad \int ح\, ء ن = ح \int ء ن$$

وبفرض $ء ن = د(س)\, ء س$ يكون

$$\int ح\, د(س)\, ء س = ح \int د(س)\, ء س$$

تكاملات يمكن تحصيلها مباشرة

بند تفاضل الدوال البسيطة وهى $س^{م}$ و $ح^{س}$ .... الخ يوصل مباشرة الى تكاملات نحصرها فى هذا الجدول وهو

$ء\,س^{م+١} = (م+١)\,س^{م}\,ء\,س$	$\int س^{م}\,ء\,س = \frac{س^{م+١}}{م+١} + ث$ و
$ء\,هـ^{س} = هـ^{س}\,ء\,س$	$\int هـ^{س}\,ء\,س = هـ^{س} + ث$
$ء\,ح^{س} = ح^{س}\,لوح\,ء\,س$	$\int ح^{س}\,ء\,س = \frac{ح^{س}}{لوح} + ث$
$ء\,لوس = \frac{ء\,س}{س}$	$\int \frac{ء\,س}{س} = لوس + ث$
$ء\,حاس = حتاس\,ء\,س$	$\int حتاس\,ء\,س = حاس + ث$
$ء\,حتاس = -\,حاس\,ء\,س$	$\int حاس\,ء\,س = -\,حتاس + ث$
$ء\,ظاس = \frac{ء\,س}{حتا^{٢}س}$	$\int \frac{ء\,س}{حتا^{٢}س} = ظاس + ث$
$ء\,ظتاس = \frac{-\,ء\,س}{حا^{٢}س}$	$\int \frac{ء\,س}{حا^{٢}س} = -\,ظتاس + ث$

واذا كان $س < \frac{ط}{٢}$ يكون

$ء\,قوس\,حاس = \frac{ء\,س}{\sqrt{١-س^{٢}}}$	$\int \frac{ء\,س}{\sqrt{١-س^{٢}}} = قوس\,حاس + ث$
$ء\,قوس\,حتاس = -\,\frac{ء\,س}{\sqrt{١-س^{٢}}}$	$\int \frac{ء\,س}{\sqrt{١-س^{٢}}} = -\,قوس\,حتاس + ث$

ويكون للتكامل $\int \frac{ء\,س}{\sqrt{١-س^{٢}}}$ مقداران يظهر أنهما مختلفان لكن حيث ان

$$قوس\,حتاس + قوس\,حاس = \frac{ط}{٢}$$

فيشاهد أن التكاملين لا يختلفان عن بعضهما الا بكمية ثابتة

بند وفى جميع هذه القوانين يمكن أن يكون س المتغير الغير متعلق أو دالة حيثما اتفق للمتغير الغير متعلق مثلا اذا عوض س فى القانون

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\, \text{د}\,\text{س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} \qquad (1)$$

بدالة ولتكن $\text{ى}_{1}(\text{س})$ يكون أيضا

$$\int [\text{ى}_{1}(\text{س})]^{\text{ن}}\, \text{د}\, \text{ى}_{1}(\text{س}) = \frac{[\text{ى}_{1}(\text{س})]^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$$

بند ٧ القانون (١) يكون ضالا اذا طبق على الحالة التي يكون فيها $\text{ن} = -1$ فانه يوصل اذ ذاك الى

$$\int \frac{\text{د}\,\text{س}}{\text{س}} = \frac{1}{0} + \text{ث}$$

وما ذلك الا بسبب أن $\int \frac{\text{د}\,\text{س}}{\text{س}}$ يساوي الدالة العالية لوس التي لا يمكن بيانها بمقدار جبري ومع ذلك فانه يتوصل بالتحايل الى استنتاج مقدار $\int \frac{\text{د}\,\text{س}}{\text{س}}$ من القانون (١) لاننا لو طرحنا الكمية الثابتة $\frac{1}{\text{ن}+1}$ من الطرف الثاني (وبذلك لا يختل تفاضله) يحدث

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\, \text{د}\,\text{س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1} - 1}{\text{ن}+1} + \text{ث}$$

فاذا جعل $\text{ن} = -1$ يؤول الكسر $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1} - 1}{\text{ن}+1}$ الى $\frac{0}{0}$ ولاجل تحصيل مقداره الحقيقي بالطريقة المعلومة يلزم أخذ مشتقة حدى هذا الكسر بالنسبة للمتغير ن وجعل $\text{ن} = -1$ في خارج قسمة المشتقتين أعني في $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}\,\text{لوس}}{1}$ فيحدث لوس واذن يكون

$$\int \frac{\text{د}\,\text{س}}{\text{س}} = \text{لوس} + \text{ث}$$

في حساب تكامل حاصل جمع جبري

بند ٨ من القانون

$$\text{د}(\text{ى} + \text{و} - \text{ع}) = \text{د}\,\text{ى} + \text{د}\,\text{و} - \text{د}\,\text{ع}$$

يستخرج بأخذ تكامل الطرفين

$$\int \text{د}(\text{ى} + \text{و} - \text{ع}) = \int \text{د}\,\text{ى} + \int \text{د}\,\text{و} - \int \text{د}\,\text{ع}$$

أو

$$\int [\text{ى}(\text{س}) + \text{ى}_{1}(\text{س}) - \text{ى}_{2}(\text{س})]\, \text{د}\,\text{س}$$

$$= \int \text{ى}(\text{س})\, \text{د}\,\text{س} + \int \text{ى}_{1}(\text{س})\, \text{د}\,\text{س} - \int \text{ى}_{2}(\text{س})\, \text{د}\,\text{س}$$

ومن هنا يعلم أن تكامل حاصل جمع جملة دوال يساوي مجموع تكاملات هذه الدوال مثلا

$$\int(\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}}+\text{ء}\,\text{س}^{\text{ن}}+\text{ه}\,\text{س}^{\text{ع}}+\ldots)\,\text{ءس}=\frac{\text{ح}\,\text{س}^{\text{م}+1}}{\text{م}+1}+\frac{\text{ء}\,\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}+\frac{\text{ه}\,\text{س}^{\text{ع}+1}}{\text{ع}+1}+\ldots \quad \text{،}$$

$$\int(٤\,\text{س}^{٣}-٥\,\text{س}^{٢}-٣\,\text{س}+٨)\,\text{ءس}=\text{س}^{٤}-\frac{٥}{٣}\,\text{س}^{٣}-\frac{٣}{٢}\,\text{س}^{٢}+٨\,\text{س}+\text{ث} \quad \text{،}$$

$$\int\frac{(\text{س}^{٣}-٤\,\text{س}^{٢}+٥)\,\text{ءس}}{\text{س}}=\frac{١}{٣}\,\text{س}^{٣}-٢\,\text{س}^{٢}+٥\,\text{لوس}+\text{ث}$$

في أخـــذ التكامل بالتجـــزي

بنـد ٩ قد شاهدنا أنه اذا كانت ى و و دالتين حيثما اتفق لمتغير واحد يكون

$$\text{ء}\,.\,\text{ى}\,\text{و}=\text{ى}\,\text{ء}\,\text{و}+\text{و}\,\text{ء}\,\text{ى}$$

واذن يكون

$$\text{ى}\,\text{و}=\int\text{ى}\,\text{ء}\,\text{و}+\int\text{و}\,\text{ء}\,\text{ى}$$

ويكون

$$\int\text{ى}\,\text{ء}\,\text{و}=\text{ى}\,\text{و}-\int\text{و}\,\text{ء}\,\text{ى}$$

وهذا القانون الذي به يؤل البحث عن التكامل $\int\text{ى}\,\text{ء}\,\text{و}$ الى البحث عن التكامل $\int\text{و}\,\text{ء}\,\text{ى}$ هو الذي تنحصر فيه طريقة كثيرة الاستعمال لحساب التكامل وتسمى طريقة حساب التكامل بالتجزي ولو أن الاوفق تسميتها بطريقة حساب التكامل بالعوامل اذ أنها مؤسسة على تحليل التفاضل المراد حساب تكامله الى عاملين

(أمثلة) ـ الاول $\int\text{س}^{٢}\,\text{حتاس}\,\text{ءس}$

يوضع

$$\int\text{س}^{٢}\,\text{حتاس}\,\text{ءس}=\int\text{س}^{٢}\,\text{ء}\,\text{حاس}=\text{س}^{٢}\,\text{حاس}-٢\int\text{س}\,\text{حاس}\,\text{ءس} \quad \text{،}$$

$$\int\text{س}\,\text{حاس}\,\text{ءس}=-\int\text{س}\,\text{ء}\,\text{حتاس}=-\text{س}\,\text{حتاس}+\int\text{حتاس}\,\text{ءس}$$

$$=-\text{س}\,\text{حتاس}+\text{حاس}+\text{ث}$$

واذن يكون

$$\int\text{س}^{٢}\,\text{حتاس}\,\text{ءس}=\text{س}^{٢}\,\text{حاس}+٢\,\text{س}\,\text{حتاس}-٢\,\text{حاس}+\text{ث}$$

الثانى $\int س^{م} هـ^{س} \, ءس$

فيكتب

$$\int س^{م} هـ^{س} \, ءس = \int س^{م} \, ء هـ^{س} = س^{م} هـ^{س} - م \int س^{م-١} هـ^{س} \, ءس$$

وبذلك تؤول عملية أخذ تكامل $س^{م} هـ^{س} \, ءس$ الى عملية أخذ تكامل $س^{م-١} هـ^{س} \, ءس$ وبمثل هذا تؤول هذه العملية الاخيرة الى عملية أخذ تكامل $س^{م-٢} هـ^{س} \, ءس$ وهلم جرا بحيث اذا كان م عددا صحيحا موجبا يتوصل أخيرا الى البحث عن $\int هـ^{س} \, ءس$ الذى هو $هـ^{س} + ث$ وبالاوضاع المتتالية يتحصل التكامل المطلوب

فاذا جعل م = ٢ يحدث

$$\int س^{٢} هـ^{س} \, ءس = هـ^{س} (س^{٢} - ٢ س + ٢) + ث$$

الثالث ـ اذا طبقت القاعدة المتقدمة لحساب

$$\int لوس \, ءس$$

يوجد

$$\int لوس \, ءس = س لوس - \int س \frac{ءس}{س} = س (لوس - ١) + ث$$

فى أخذ التكامل بالوضع

بند ١ ـ أحيانا يمكن تحصيل تكامل الدالة التفاضلية $د(س) \, ءس$ بتغيير المتغير الغير متعلق واذ ذاك يقال ان التكامل متحصل بطريقة الوضع

مثلا ليكن $س = د_{١}(ر)$ فيكون $ءس = د'_{١}(ر) \, ءر$

ويكون $\int د(س) \, ءس = \int د[د_{١}(ر)] \, د'_{١}(ر) \, ءر$

(أمثلة) ـ الاول

$$\int (ح س + د)^{م} \, ءس$$

فيوضع

$$ح س + د = ر \quad \text{فيكون} \quad ءس = \frac{ءر}{ح}$$

واذن يكون

$$\int (ح س + د)^{م} \, ءس = \frac{١}{ح} \int ر^{م} \, ءر = \frac{١}{ح} \frac{ر^{م+١}}{م+١} + ث$$

أى $\int (\text{ح}\,\text{س} + \text{ء})^{\text{م}}\,\text{ء}\,\text{س} = \frac{1}{\text{ح}}\,\frac{(\text{ح}\,\text{س} + \text{ء})^{\text{م}+1}}{\text{م}+1} + \text{ث}$

الثانى ـ وعلى العموم اذا كان المطلوب حساب

$$\int \text{د}(\text{ح}\,\text{س} + \text{ء})\,\text{ء}\,\text{س}$$

يوضع $\text{ح}\,\text{س} + \text{ء} = \text{ر}$ فيكون $\text{ء}\,\text{س} = \frac{\text{ء}\,\text{ر}}{\text{ح}}$ ويؤل الامر الى $\frac{1}{\text{ح}} \int \text{د}(\text{ر})\,\text{ء}\,\text{ر}$

الثالث ـ اذا أريد حساب

$$\int \frac{\text{س}\,\text{ء}\,\text{س}}{\sqrt{\text{ح}^2 + \text{س}^2}}$$

يوضع

$\sqrt{\text{ح}^2 + \text{س}^2} = \text{ر}$ فيكون $\text{ح}^2 + \text{س}^2 = \text{ر}^2$ ويكون $\text{س}\,\text{ء}\,\text{س} = \text{ر}\,\text{ء}\,\text{ر}$

واذن يكون

$$\int \frac{\text{س}\,\text{ء}\,\text{س}}{\sqrt{\text{ح}^2 + \text{س}^2}} = \int \text{ء}\,\text{ر} = \text{ر} + \text{ث} = \sqrt{\text{ح}^2 + \text{س}^2} + \text{ث}$$

الرابع ـ هذه الطريقة توصل الى حساب التكامل الكثير الاستعمال وهو

$$\int \frac{\text{ء}\,\text{س}}{\text{س}^2 + \text{ح}\,\text{س} + \text{ك}}$$

متى كان العاملان ذوا الدرجة الاولى اللذان تحلل اليهما ذات الثلاثة الحدود وهى $\text{س}^2 + \text{ح}\,\text{س} + \text{ك}$ تخيليين أعنى متى كان $\text{ك} - \frac{\text{ح}^2}{4} > 0$. ولذلك يلاحظ أن

$$\text{س}^2 + \text{ح}\,\text{س} + \text{ك} = \left(\text{س} + \frac{\text{ح}}{2}\right)^2 + \left(\text{ك} - \frac{\text{ح}^2}{4}\right)$$

واذا جعل

$\text{س} + \frac{\text{ح}}{2} = \text{ر}\sqrt{\text{ك} - \frac{\text{ح}^2}{4}}$ يكون $\text{ء}\,\text{س} = \text{ء}\,\text{ر}\sqrt{\text{ك} - \frac{\text{ح}^2}{4}}$

ويؤل التكامل المطلوب الى

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ك} - \frac{\text{ح}^2}{4}}} \int \frac{\text{ء}\,\text{ر}}{1 + \text{ر}^2} = \frac{1}{\sqrt{\text{ك} - \frac{\text{ح}^2}{4}}}\ \text{قوس طا}\ \text{ر} + \text{ث}$$

وبتعويض ر بمقدارها بدلالة س يحدث

$$\int \frac{\text{ء}\,\text{س}}{\text{س}^2 + \text{ح}\,\text{س} + \text{ك}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ك} - \frac{\text{ح}^2}{4}}}\ \text{قوس طا}\ \frac{\text{س} + \frac{\text{ح}}{2}}{\sqrt{\text{ك} - \frac{\text{ح}^2}{4}}} + \text{ث}$$

وهذا الناتج يمكن وضعه بصورة أخرى ولذلك نفرض ان $ح + د\sqrt{-1}$ و $ح - د\sqrt{-1}$ هما الجذران التخيليان للمعادلة

$$س^2 + ع\,س + ك^2 = 0$$

فيكون

$$ح = -\frac{ع}{2} \quad ,\quad د = \sqrt{ك^2 - \frac{ع^2}{4}}$$

وإذن يمكن كتابة التكامل المبحوث عنه هكذا

$$\int \frac{ء\,س}{س^2 + ع\,س + ك^2} = \frac{1}{د}\ \text{قوس طا}\ \frac{س - ح}{د} + ث$$

الخامس — ليكن المطلوب حساب

$$\int \frac{ء\,س}{\sqrt{ح - د\,س^2}}$$

فيكتب

$$\int \frac{ء\,س}{\sqrt{ح - د\,س^2}} = \frac{1}{\sqrt{ح}} \int \frac{ء\,س}{\sqrt{1 - \frac{د\,س^2}{ح}}}$$

ثم يجعل

$\frac{د\,س^2}{ح} = ر^2$ فيكون $س = ر\sqrt{\frac{ح}{د}}$ ويكون $ء\,س = \sqrt{\frac{ح}{د}}\ ء\,ر$

وإذن يكون

$$\int \frac{ء\,س}{\sqrt{ح - د\,س^2}} = \frac{1}{\sqrt{ح}} \int \frac{\sqrt{\frac{ح}{د}}\ ء\,ر}{\sqrt{1 - ر^2}} = \frac{1}{\sqrt{د}} \int \frac{ء\,س}{\sqrt{1 - ر^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{د}}\ \text{قوس حا}\ ر + ث$$

أى

$$\int \frac{ء\,س}{\sqrt{ح - د\,س^2}} = \frac{1}{\sqrt{د}}\ \text{قوس حا}\left(س\sqrt{\frac{د}{ح}}\right) + ث$$

السادس — اذا كان المطلوب البحث عن

$$\int \frac{ء\,س}{ح + د\,س}$$

يجعل

$ح + د\,س = ر$ فيكون $د\,ء\,س = ء\,ر$

ويكون

$$\int \frac{\text{ء}\text{س}}{\text{ح}+\text{د}\text{س}} = \frac{1}{\text{د}}\int \frac{\text{ء}\text{ى}}{\text{ى}} = \frac{1}{\text{د}}\,\text{لو}\,\text{ى} + \text{ث} = \frac{1}{\text{د}}\,\text{لو}\,(\text{ح}+\text{د}\text{س}) + \text{ث}$$

وبمثل ذلك يوجد ان

$$\int \frac{\text{ء}\text{س}}{(\text{ح}+\text{د}\text{س})^{\text{م}}} = \frac{1}{\text{د}}\int \frac{\text{ء}\text{ى}}{\text{ى}^{\text{م}}} = -\frac{1}{(\text{م}-1)\,\text{د}}\;\frac{1}{\text{ى}^{\text{م}-1}} + \text{ث}$$

$$= -\frac{1}{(\text{م}-1)\,\text{د}\,(\text{ح}+\text{د}\text{س})^{\text{م}-1}}$$

الفصل الثانى

فى حساب تكامل الكسور الجذرية

بند ليكن المطلوب حساب تكامل الكسر

$$\frac{\text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}}{\text{د}_1(\text{س})}$$

والدالتان $\text{د}(\text{س})$ و $\text{د}_1(\text{س})$ دالتان جبريتان صحيحتان للمتغير س

فاذا لم تكن درجة $\text{د}(\text{س})$ أقل من درجة $\text{د}_1(\text{س})$ يمكن قسمة $\text{د}(\text{س})$ على $\text{د}_1(\text{س})$ ويستمر فى القسمة الى أن يتوصل الى باق $\text{د}_2(\text{س})$ درجته أصغر من درجة $\text{د}_1(\text{س})$ ولنفرض ان الخارج هو ك فيكون

$$\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})} = \text{ك} + \frac{\text{د}_2(\text{س})}{\text{د}_1(\text{س})}$$

ويكون

$$\int \frac{\text{د}(\text{س})\,\text{ء}\text{س}}{\text{د}_1(\text{س})} = \int \text{ك}\,\text{ء}\text{س} + \int \frac{\text{د}_2(\text{س})\,\text{ء}\text{س}}{\text{د}_1(\text{س})}$$

وحيث قد علمت كيفية تحصيل $\int \text{ك}\,\text{ء}\text{س}$ فتؤول المسئلة الى حساب تكامل الكسر الجذرى

وهو $\frac{\text{د}_2(\text{س})\,\text{ء}\text{س}}{\text{د}_1(\text{س})}$ الذى فيه $\text{د}_2(\text{س})$ بدرجة أقل من درجة $\text{د}_1(\text{س})$

في الحالة التي لا يكون فيها للمقام سوى جذور بسيطة

بند ١٢ لنبحث حينئذ عن

$$\int \frac{د_{م}(س)\, ء س}{د_{١}(س)}$$

ولذلك نفرض أن م درجة المعادلة

$$د_{١}(س) = ٠$$

التي نفرض أن جذورها التي عددها م هي ا و ب و ح و ... و ل

ولنفرض أولاً أن هذه الجذور المميزة العدد الحقيقية والتخيلية بسيطة ونبحث ان أمكن عن الثوابت $ا_{١}$ و $ب_{١}$ و $ح_{١}$ و ... و $ل_{١}$ المميزة العدد التي تحقق المعادلة

$$\frac{د_{م}(س)}{د_{١}(س)} = \frac{ا_{١}}{س - ا} + \frac{ب_{١}}{س - ب} + \cdots + \frac{ل_{١}}{س - ل} \qquad (١)$$

ولذا يكفي أن يكون

$$د_{م}(س) = ا_{١}\frac{د_{١}(س)}{س - ا} + ب_{١}\frac{د_{١}(س)}{س - ب} + \cdots + ل_{١}\frac{د_{١}(س)}{س - ل} \qquad (٢)$$

وجميع الخوارج $\frac{د_{١}(س)}{س - ا}$ و $\frac{د_{١}(س)}{س - ب}$ الخ صحيحة وعدد المجاهيل $ا_{١}$ و $ب_{١}$ و $ح_{١}$ الخ يساوي م وحينئذ يمكن ايجاد مقاديرها بمساواة معاملات القوى المتحدة للمتغير س ببعضها في الطرفين الا أنه يمكن استعمال طريقة أبسط من هذه وأفضل اذ بها يعلم أن هذه المقادير محدودة ومعينة

ولذلك نجعل س = ا في المعادلة (٢) فحيث كانت الجذور ا و ب و ح الخ بسيطة فتصير الخوارج $\frac{د_{١}(س)}{س - ب}$ و $\frac{د_{١}(س)}{س - ح}$ و ... و $\frac{د_{١}(س)}{س - ل}$ معدومة وأما $\frac{د_{١}(س)}{س - ا}$ فانه يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ الا أن مقداره الحقيقي هو $د'_{١}(ا)$ واذن يكون

$$د_{م}(ا) = ا_{١}\, د'_{١}(ا) \qquad \text{ومن هنا يكون} \qquad ا_{١} = \frac{د_{م}(ا)}{د'_{١}(ا)}$$

ومقدار $ا_{١}$ هذا محدود لانه حيث كان ا جذرا بسيطا للدالة $د_{١}(س)$ فلا تكون $د'_{١}(ا)$ معدومة

وخلاف ذلك فان مقدار $ا$ يكون مخالفا للصفر اذا فرض أن الكسر $\frac{د_٢(س)}{د_١(س)}$ غير قابل للاختصار (وهذا ممكن دائما)

ويعلم من ذلك أن مقادير الثوابت التى تحقق معادلة (٢) هى

$$ا = \frac{د_٢(ا)}{د_١'(ا)} \quad و \quad ب = \frac{د_٢(ب)}{د_١'(ب)} \quad و \quad \cdots \quad و \quad ل' = \frac{د_٢(ل')}{د_١'(ل')} \qquad (٣)$$

بند ١٣ ومتى أجرى التحليل المبين بمعادلة (١) يكون

$$\int \frac{د_٢(س)\,ء س}{د_١(س)} = \int \frac{ا\,ء س}{س - ا} + \int \frac{ب\,ء س}{س - ب} + \cdots$$

واذن يكون

$$\int \frac{د_٢(س)\,ء س}{د_١(س)} = ا\,لوَ(س - ا) + ب\,لوَ(س - ب) + \cdots \qquad (٤)$$

فى الحالة التى يكون فيها بعض الجذور البسيطة تخيليا

بند ١٤ اذا كان بعض جذور المعادلة $د_١(س) = ٠$ تخيليا كان التحليل (١) ممكنا أيضا غير أن الحد المطابق لجذر تخيلى فى القانون (٤) يكون تخيليا واذ ذاك يكون الاوفق العمل بالكيفية الآتية وهى

لنعتبر جذرين تخيليين مقترنين وليكونا

$$ح = ل + ك\sqrt{-١} \quad , \quad ء = ل - ك\sqrt{-١}$$

فيكون

$$ا = \frac{د_٢(ا)}{د_١'(ا)} = \frac{د_٢(ل + ك\sqrt{-١})}{د_١'(ل + ك\sqrt{-١})} = ى + م\sqrt{-١}$$

وحرفا ى و م رمزان لدالتين حقيقيتين وجذريتين للمقدارين ل و ك وبتغيير $\sqrt{-١}$ الى $-\sqrt{-١}$ يحدث

$$ب = \frac{د_٢(ب)}{د_١'(ب)} = \frac{د_٢(ل - ك\sqrt{-١})}{د_١'(ل - ك\sqrt{-١})} = ى - م\sqrt{-١}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{\text{أ}}{\text{س}-\text{ا}}+\frac{\text{ب}}{\text{س}-\text{ب}}=\frac{\text{ن}+\text{م}\sqrt{-١}}{\text{س}-\text{ل}-\text{ك}\sqrt{-١}}+\frac{\text{ن}-\text{م}\sqrt{-١}}{\text{س}-\text{ل}+\text{ك}\sqrt{-١}}$$

$$=\frac{٢\text{ن}(\text{س}-\text{ل})-٢\text{م}\text{ك}}{(\text{س}-\text{ل})^{٢}+\text{ك}^{٢}}$$

واذن يكون

$$\int\left(\frac{\text{أ}}{\text{س}-\text{ا}}+\frac{\text{ب}}{\text{س}-\text{ب}}\right)\text{دس}=\int\frac{٢\text{ن}(\text{س}-\text{ل})\,\text{دس}}{(\text{س}-\text{ل})^{٢}+\text{ك}^{٢}}-\int\frac{٢\text{م}\text{ك}\,\text{دس}}{(\text{س}-\text{ل})^{٢}+\text{ك}^{٢}}$$

لكن

$$\int\frac{٢\text{ن}(\text{س}-\text{ل})\,\text{دس}}{(\text{س}-\text{ل})^{٢}+\text{ك}^{٢}}=\text{ن}\,\text{لو}\left[(\text{س}-\text{ل})^{٢}+\text{ك}^{٢}\right]\quad\text{و}$$

$$\int\frac{٢\text{م}\text{ك}\,\text{دس}}{(\text{س}-\text{ل})^{٢}+\text{ك}^{٢}}=٢\text{م}\ \text{قوس طا}\left(\frac{\text{س}-\text{ل}}{\text{ك}}\right)$$

وحينئذ يكون

$$\int\left(\frac{\text{أ}}{\text{س}-\text{ا}}+\frac{\text{ب}}{\text{س}-\text{ب}}\right)\text{دس}$$

$$=\text{ن}\,\text{لو}\left[(\text{س}-\text{ل})^{٢}+\text{ك}^{٢}\right]-٢\text{م}\ \text{قوس طا}\left(\frac{\text{س}-\text{ل}}{\text{ك}}\right)+\text{ث}$$

بند ١٥ أمثلة – الاول ليكن الكسر

$$\frac{\text{د}_{٢}(\text{س})}{\text{د}_{١}(\text{س})}=\frac{(٣-٢\text{س})\,\text{دس}}{\text{س}^{٢}-\text{س}-٢}=\frac{(٣-٢\text{س})\,\text{دس}}{(\text{س}+١)(\text{س}-٢)}$$

فيوضع

$$\frac{٣-٢\text{س}}{\text{س}^{٢}-\text{س}-٢}=\frac{\text{أ}}{\text{س}+١}+\frac{\text{ب}}{\text{س}-٢}$$

وبتعويض س على التوالي بالعددين −١ و +٢ في المتطابقة

$$\frac{\text{د}_{٢}(\text{س})}{\text{د}'_{١}(\text{س})}=\frac{٣-٢\text{س}}{٢\text{س}-١}$$

يحدث

$$ا = -\frac{٥}{٣} \quad , \quad ب = -\frac{١}{٣}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\int \frac{(٣ - ٢س) \, ءس}{س^٢ - س - ٢} = -\frac{٥}{٣} لو(س + ١) - \frac{١}{٣} لو(س - ٢) + ث$$

الثانى - ليكن الكسر

$$\frac{د_٢(س)}{د_١(س)} = \frac{١}{ح^٢ - س^٢}$$

فيوضع

$$\frac{١}{ح^٢ - س^٢} = \frac{ا}{س - ح} + \frac{ب}{س + ح}$$

وفى هذا المثال يكون

$$\frac{د_٢(س)}{د_١'(س)} = -\frac{١}{٢س} \quad , \quad ا = \frac{-١}{٢ح} \quad , \quad ب = \frac{١}{٢ح}$$

واذن يكون

$$\int \frac{ءس}{ح^٢ - س^٢} = -\frac{١}{٢ح} لو(س - ح) + \frac{١}{٢ح} لو(س + ح) + ث$$

أى

$$\int \frac{ءس}{ح^٢ - س^٢} = \frac{١}{٢ح} لو\left(\frac{س + ح}{س - ح}\right) + ث = \frac{١}{٢ح} لو\left(ث' \frac{س + ح}{س - ح}\right)$$

الثالث - ليكن

$$\frac{د_٢(س)}{د_١(س)} = \frac{(٣س + ٧) \, ءس}{٢س^٢ - ٣س + ٥}$$

فحيث انه ليس للمعادلة $٢س^٢ - ٣س + ٥ = ٠$ سوى جذور تخيلية فتجرى عملية أخذ التكامل مباشرة بدون تحليل هذا الكسر الى كسرين أبسط منه

ولذلك نعلم ان مشتقة $٢س^٢ - ٣س + ٥$ هى $٤س - ٣$ وبقسمة $٣س + ٧$ على $٤س - ٣$ يحدث

$$\frac{\text{٣س}+\text{٧}}{\text{٤س}+\text{٣}}=\frac{\text{٣}}{\text{٤}}+\frac{\text{٣٧}}{\text{٤(٤س}-\text{٣)}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{٣س}+\text{٧}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥}}=\frac{\frac{\text{٣}}{\text{٤}}(\text{٤س}-\text{٣})+\frac{\text{٣٧}}{\text{٤}}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥}}$$

وحينئذ يكون

$$\int\frac{(\text{٣س}+\text{٧})\,\text{ءس}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥}}=\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\int\frac{(\text{٤س}-\text{٣})\,\text{ءس}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥}}+\frac{\text{٣٧}}{\text{٤}}\int\frac{\text{ءس}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥}}$$

أو

$$\int\frac{(\text{٣س}+\text{٧})\,\text{ءس}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥}}=\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\,\text{لوَ}(\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥})+\frac{\text{٣٧}}{\text{٤}}\int\frac{\text{ءس}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥}}$$

لكن

$$\frac{\text{٣٧}}{\text{٤}}\int\frac{\text{ءس}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥}}=\frac{\text{٣٧}}{\text{٨}}\int\frac{\text{ءس}}{(\text{س}-\frac{\text{٣}}{\text{٤}})^{\text{٢}}+\frac{\text{٣١}}{\text{١٦}}}$$

وهذا التكامل الاخير يساوى بموجب (بنـد) لهذا المقدار وهو

$$\frac{\text{٤}}{\sqrt{\text{٣١}}}\ \text{قوس طا}\ \frac{\text{٤س}-\text{٣}}{\sqrt{\text{٣١}}}$$

وحينئذ يكون

$$\int\frac{(\text{٣س}+\text{٧})\,\text{ءس}}{\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥}}=\frac{\text{٣}}{\text{٤}}\,\text{لوَ}(\text{٢س}^{\text{٢}}-\text{٣س}+\text{٥})$$

$$+\frac{\text{٣٧}}{\text{٢}\sqrt{\text{٣١}}}\ \text{قوس طا}\ \frac{\text{٤س}-\text{٣}}{\sqrt{\text{٣١}}}+\text{ث}$$

الرابع ـ وعلى العموم اذا كان المقدار المطلوب تحصيل تكامله هو

$$\frac{(\text{مس}+\text{ن})\,\text{ءس}}{(\text{س}-\text{ل})^{\text{٢}}+\text{ى}^{\text{٢}}}$$

يوضع هكذا

$$\frac{\text{م}}{\text{٢}}\int\frac{\text{٢(س}-\text{ل)}\,\text{ءس}}{(\text{س}-\text{ل})^{\text{٢}}+\text{ى}^{\text{٢}}}+(\text{مل}+\text{ن})\int\frac{\text{ءس}}{(\text{س}-\text{ل})^{\text{٢}}+\text{ى}^{\text{٢}}}$$

وحيث ان

$$\int \frac{2(س-ل)\,ء س}{(س-ل)^2+ى^2} = لو[(س-ل)^2+ى^2] \quad و$$

$$\int \frac{ء س}{(س-ل)^2+ى^2} = \frac{1}{ى} \text{ قوس طا } \frac{س-ل}{ى}$$

فيكون

$$\int \frac{(م س+ن)\,ء س}{(س-ل)^2+ى^2} = \frac{م}{2} لو[(س-ل)^2+ى^2]$$

$$+ \frac{م ل+ن}{ى} \text{ قوس طا } \frac{س-ل}{ى} + ث$$

فى الحالة التى تكون فيها الجذور مضاعفة

بند ١٦ فى الحالة التى يكون فيها المقام الكسر $\int \frac{ء_2(س)\,ء س}{ء_1(س)}$ عوامل مضاعفة أعنى اذا كان

$$ء_1(س) = م(س-ا)^{ن}(س-ب)^{ع}(س-ح)^{ل} \ldots (س-ل')$$

لايمكن ايجاد مقادير للثوابت $ا_1$ و $ب_1$ و $ح_1$ و ... $ل'_1$ تحقق المتطابقة

$$\frac{ء_2(س)}{ء_1(س)} = \frac{ا_1}{س-ا} + \frac{ب_1}{س-ب} + \ldots$$

لانه اذا حولت جميع حدود الطرف الثانى الى كسر واحد لايكون مقام هذا الكسر مشتملا على $س-ا$ الا بدرجة أولى مع ان هذا العامل يدخل بدرجة $ن$ فى $ء_1(س)$ وقد فرض أن الكسر $\frac{ء_2(س)}{ء_1(س)}$ لايقبل الاختصار

ولاجل ايضاح كيفية التحليل فى هذه الحالة نفرض أوّلا أن

$$ء_1(س) = (س-ا)^{ن}$$

ثم نعلم ان

$$ء_2(س) = ء_2[ا+(س-ا)] = ء_2(ا) + ء'_2(ا)(س-ا) + ء''_2(ا)\frac{(س-ا)^2}{1\times2} + \ldots$$

واذن يكون

$$\frac{ع_٢(س)}{(س-١)^ن} = \frac{ع_٢(١)}{(س-١)^ن} + \frac{ع_٢'(١)}{(س-١)^{ن-١}} + \frac{١}{١×٢}\frac{ع_٢''(١)}{(س-١)^{ن-٢}} + \cdots$$

$$+ \frac{١}{١×٢\cdots(ن-١)}\frac{ع^{(ن-١)}(١)}{س-١}$$

وهذا التحليل لا يمتد زيادة عن ذلك لان $ع_٢(س)$ تكون فى الغاية بدرجة $ن-١$ حيث فرض أن $ع_١(س) = (س-١)^ن$ ويعلم من ذلك أنه يمكن تحليل $\frac{ع_٢(س)}{ع_١(س)}$ الى كسور عددها $ن$ كل منها بسطه ثابت ومقامه قوة لذات الحدين $س-١$

وحينئذ ترجع المسئلة الى أخذ تكامل كسور بالصورة $\frac{٤س}{(س-١)^ه}$ وحيث انه يمكن كتابة هذا التفاضل بالصورة $\frac{٤(س-١)}{(س-١)^ه}$ فيشاهد ان تكامله هو $-\frac{١}{(ه-١)(س-١)^{ه-١}}$ ان كان $ه>١$ ، و $لو(س-١)$ ان كان $ه=١$

بند ١٧ ولنبحث الآن عن اجراء تحليل مشابه للمتقدم فى الحالة العمومية أعنى متى كان

$$ع_١(س) = م(س-١)^ن(س-ب)^ع(س-ح)^ل\cdots(س-ك) = (س-١)^ن ع_٣(س)$$

ولذلك نفرض أن $ف$ و $ف_١$ و $ف_٢$ و … و $ف_{ن-١}$ معاملات تحقق المتطابقة

$$\frac{ع_٢(س)}{ع_١(س)} = \frac{ف}{(س-١)^ن} + \frac{ف_١}{(س-١)^{ن-١}} + \cdots + \frac{ف_{ن-١}}{س-١} + \frac{ع_٤(س)}{ع_٣(س)}$$

و $ع_٤(س)$ كمية كثيرة الحدود جذرية وصحيحة بالنسبة للمتغير $س$ فاذا ضربت هذه المعادلة فى $ع_١(س)$ وحولت الحدود التى تشتمل على $ف$ و $ف_١$ و $ف_٢$ و … و $ف_{ن-١}$ الى الطرف الاول يلزم بكل مقدار للمتغير $س$ أن يكون

$$(١)\quad \begin{cases} ع_٢(س) - ف\frac{ع_١(س)}{(س-١)^ن} - ف_١\frac{ع_١(س)}{(س-١)^{ن-١}} - ف_٢\frac{ع_١(س)}{(س-١)^{ن-٢}} - \cdots \\ - ف_{ن-١}\frac{ع_١(س)}{س-١} = (س-١)^ن ع_٤(س) \end{cases}$$

وبتحليل $ى_م(س)$ على حسب القوى التصاعدية لذات الحدين س – ١ يحدث

$$ى_م(س) = ى_م(١) + ى'_م(١)(س-١) + \frac{ى''_م(١)}{١\times٢}(س-١)^٢ + \cdots$$

وبمثل ذلك يتحصل على تحليل للدالة $ى_١(س)$ مشابه لهذا الآن حيث كان ١ جذرا مضاعفا بدرجة ن تكون $ى_١(١)$ و $ى'_١(١)$ و … و $ى_١^{ن-١}(١)$ معدومة ويكون

$$ى_١(س) = \frac{ى_١^{ن}(١)}{١\times٢\cdots\times ن}(س-١)^{ن} + \frac{ى_١^{ن+١}(١)}{١\times٢\cdots(ن+١)}(س-١)^{ن+١} + \cdots$$

وبوضع مقداري $ى_م(س)$ و $ى_١(س)$ هذين في المعادلة (١) والترتيب على حسب القوى التصاعدية لذات الحدين (س – ١) يؤول الطرف الاول الى

$$ى_م(١) - ف\frac{ى_١^{ن}(١)}{١\times٢\cdots\times ن}$$

$$+\left[ى'_م(١) - ف\frac{ى_١^{ن+١}(١)}{١\times٢\cdots(ن+١)} - ف_١\frac{ى_١^{ن}(١)}{١\times٢\cdots\times ن}\right](س-١)$$

$$+\left[\frac{ى''_م(١)}{١\times٢} - ف\frac{ى_١^{ن+٢}(١)}{١\times٢\cdots(ن+٢)} - ف_١\frac{ى_١^{ن+١}(١)}{١\times٢\cdots(ن+١)} - ف_٢\frac{ى_١^{ن}(١)}{١\times٢\cdots\times ن}\right](س-١)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{ى_م^{ن}(١)}{١\times٢\cdots\times ن} - ف\frac{ى_م^{٢ن}(١)}{١\times٢\cdots\times٢ن} - ف_١\frac{ى_م^{٢ن-١}(١)}{١\times٢\cdots(٢ن+١)} - \cdots\right](س-١)^{ن}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

وحيث كان الطرف الثاني قابلا للقسمة على $(س-١)^{ن}$ فيجب أن يكون الطرف الاول كذلك وحينئذ يلزم أن تكون معاملات جميع قوى س – ١ في الطرف الاول الى معامل $(س-١)^{ن-١}$ معدومة

وبمساواة هذه المعاملات بالصفر توجد معادلات عددها ن بدرجة أولى بها يتعين ف و $ف_١$ و $ف_٢$ و … و $ف_{ن-١}$

بند ١٨ متى وضع $\frac{د_٢(س)}{د_١(س)}$ بالصورة

$$\frac{ف}{(س-ا)^{ن}} + \frac{ف_١}{(س-ا)^{ن-١}} + \cdots + \frac{ف_{ن-١}}{س-ا} + \frac{د_٤(س)}{د_٣(س)}$$

يوضع كذلك $\frac{د_٤(س)}{د_٣(س)}$ بالصورة

$$\frac{ق}{(س-ب)^{ع}} + \frac{ق_١}{(س-ب)^{ع-١}} + \cdots + \frac{ق_{ع-١}}{س-ب} + \frac{د_٦(س)}{د_٥(س)}$$

و $د_٥(س)$ رمز الخارج قسمة $د_٣(س)$ على $(س-ب)^{ع}$

و بالاستمرار بهذه الكيفية ينتهى بتحصيل التحليل

$$\frac{د_٢(س)}{د_١(س)} = \frac{ف}{(س-ا)^{ن}} + \frac{ف_١}{(س-ا)^{ن-١}} + \cdots + \frac{ف_{ن-١}}{س-ا}$$

$$+ \frac{ق}{(س-ب)^{ع}} + \frac{ق_١}{(س-ب)^{ع-١}} + \cdots + \frac{ق_{ع-١}}{س-ب}$$

$$+ \frac{ر}{(س-ح)^{ل}} + \frac{ر_١}{(س-ح)^{ل-١}} + \cdots + \frac{ر_{ل-١}}{س-ح}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{ط}{س-ك}$$

وهو مقدار اذا ضرب فى ءس يكون من السهل الحصول على تكامله

حالة خصوصية للجذور المضاعفة التخيلية

بند ١٩ اذا كان بعض الجذور المضاعفة للمعادلة $د_١(س) = ٠$ تخيليا يكون تحليل $\frac{د_٢(س)}{د_١(س)}$ مشتملا على كميات تخيلية يمكن محوها بوضع الحدود الموافقة للجذور المقترنة بكيفية مناسبة الا أن الابسط العمل بالكيفية الآتية وهى

ليكن $\text{ل} \pm \text{ے}\sqrt{-1}$ جذرين مقترنين للمعادلة $\text{د}_{1}(\text{س}) = 0$. ولتكن ن درجة تضعيفهما ولنضع

$$\frac{\text{د}_{2}(\text{س})}{\text{د}_{1}(\text{س})} = \frac{\text{ف}\,\text{س} + \text{ں}}{[(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}]^{\text{ن}}} + \frac{\text{ف}_{1}\,\text{س} + \text{ں}_{1}}{[(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}]^{\text{ن}-1}}$$

$$+ \frac{\text{ف}_{2}\,\text{س} + \text{ں}_{2}}{[(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}]^{\text{ن}-2}} + \ldots + \frac{\text{ف}_{\text{ن}-1}\,\text{س} + \text{ں}_{\text{ن}-1}}{(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}} + \frac{\text{د}_{4}(\text{س})}{\text{د}_{3}(\text{س})}$$

و ف و ں و ف_{1} و ں_{1} و ... الخ ثوابت يقتضى تعيينها و $\text{د}_{4}(\text{س})$ دالة جذرية وصحيحة للمتغير س و $\text{د}_{3}(\text{س})$ خارج قسمة $\text{د}_{1}(\text{س})$ على $[(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}]^{\text{ن}}$ ولذلك يضرب الطرفان فى $\text{د}_{1}(\text{س})$ فتحدث هذه المتطابقة وهى

$$\text{د}_{2}(\text{س}) - (\text{ف}\,\text{س}+\text{ں})\,\text{د}_{3}(\text{س}) - (\text{ف}_{1}\,\text{س}+\text{ں}_{1})\,[(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}]\,\text{د}_{3}(\text{س})$$
$$- (\text{ف}_{2}\,\text{س}+\text{ں}_{2})\,[(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}]^{2}\,\text{د}_{3}(\text{س})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$- (\text{ف}_{\text{ن}-1}\,\text{س}+\text{ں}_{\text{ن}-1})\,[(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}]^{\text{ن}-1}\,\text{د}_{3}(\text{س})$$
$$= [(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}]^{\text{ن}}\,\text{د}_{4}(\text{س})$$

وحينئذ يجب انتخاب الثوابت ف و ں و ف_{1} و ں_{1} و ... الخ بحيث يكون الطرف الاول من هذه المعادلة قابلا للقسمة على $[(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}]^{\text{ن}}$ أى بحيث ان هذا الطرف الاول يكون معدوما اذا عوض س فيه بالمقدار $\text{ل} + \text{ے}\sqrt{-1}$ هو ومشتقاته الاولى التى عددها $\text{ن}-1$ وبذلك توجد معادلات عددها ن كل منها ينقسم الى معادلتين اذ انه يلزم مساواة كل من الجزء الحقيقى والجزء التخيلى بصفر من كل معادلة منها

ففى المعادلة الاولى حيث ان جميع الحدود التالية للحد الثانى مشتملة على العامل $(\text{س}-\text{ل})^{2}+\text{ے}^{2}$ فتنعدم متى عوض س فيها بالمقدار $\text{س} = \text{ل} + \text{ے}\sqrt{-1}$ وحينئذ لا تكون هذه المعادلة مشتملة الا على ف و ں وحيث انها تحلل الى معادلتين فيمكن ايجاد مقدارى ف و ں وأما المعادلة الثانية وهى المتحصلة بأخذ مشتقة طرفى المعادلة الاولى فانها لا تكون مشتملة الا على ف و ں و ف_{1} و ں_{1} متى عوض س فيها بالمقدار $\text{س} = \text{ل} + \text{ے}\sqrt{-1}$ وحيث علم ف و ں وان هذه المعادلة تؤل الى معادلتين فيتحصل بها مقدارا ف_{1} و ں_{1} وبهذه الكيفية تتحصل الثوابت الاخر

ومتى أجرى هذا الحساب بحال الكسر $\frac{د_٤(س)}{د_٣(س)}$ الى جملة حدود صورتها تتعلق بموجب ما تقدم بجنس العوامل ذات الحدين الداخلة فى $د_٣(س)$

بند حالة الجذور التخيلية المضاعفة توصل الى أخذ تكامل تفاضلات بالصورة

$$\frac{(ف س + ق)\, د س}{[(س - ل)^٢ + ح^٢]^ن}$$

وفيها ن عدد صحيح موجب وللوصول اليه يوضع

$$\int \frac{(ف س + ق)\, د س}{[(س - ل)^٢ + ح^٢]^ن} = \int \frac{ف (س - ل)\, د س}{[(س - ل)^٢ + ح^٢]^ن} + \int \frac{(ف ل + ق)\, د س}{[(س - ل)^٢ + ح^٢]^ن}$$

فاذا جعل

$$(س - ل)^٢ + ح^٢ = ر \quad \text{يكون} \quad ٢ (س - ل)\, د س = د ر$$

ويكون

$$\int \frac{(ف س + ق)\, د س}{[(س - ل)^٢ + ح^٢]^ن} = \int \frac{ف\, د ر}{٢ ر^ن} = - \frac{ف}{٢(ن - ١) ر^{ن-١}}$$

$$= - \frac{ف}{٢(ن - ١) [(س - ل)^٢ + ح^٢]^{ن-١}}$$

وهذا اذا كان $ن > ١$ واذا كان $ن = ١$ يكون

$$\int \frac{ف (س - ل)\, د س}{(س - ل)^٢ + ح^٢} = \frac{ف}{٢} لو [(س - ل)^٢ + ح^٢]$$

ولم يبق علينا الا تعيين

$$\int \frac{(ف ل + ق)\, د س}{[(س - ل)^٢ + ح^٢]^ن}$$

ولاجل ذلك نجعل $س - ل = ح ع$ فيكون $د س = ح د ع$ ويكون

$$\int \frac{(ف ل + ق)\, د س}{[(س - ل)^٢ + ح^٢]^ن} = \frac{ف ل + ق}{ح^{٢ن - ١}} \int \frac{د ع}{(١ + ع^٢)^ن}$$

ويؤل الامر الى ايجاد

$$\text{ق}\ \frac{\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}}}$$

فهذه العملية الاخيرة هي التي نشتغل بها الآن فنقول وبالله التوفيق

بناء من الواضح أن

$$\text{ق}\ \frac{\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}}} = \text{ق}\ \frac{\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}-1}} - \text{ق}\ \frac{\text{ع}^2\,\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}}} \quad (1)$$

لكن

$$\text{ق}\ \frac{\text{ع}^2\,\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}}} = \frac{1}{2}\ \text{ق}\ \text{ع}\ \frac{2\,\text{ع}\,\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}}} \ ,$$

$$\frac{2\,\text{ع}\,\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}}} = \text{ء}\left[-\frac{1}{(\text{ن}-1)(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}-1}}\right]$$

وحينئذ اذا أخذ التكامل بالتجزي يحدث

$$\text{ق}\ \frac{\text{ع}^2\,\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}}} = \frac{\text{ع}}{(2\text{ن}-2)(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}-1}} + \frac{2\text{ن}-3}{2\text{ن}-2}\ \text{ق}\ \frac{\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}-1}}$$

وبهذه الكيفية يؤل البحث عن $\text{ق}\ \frac{\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}}}$ الى البحث عن $\text{ق}\ \frac{\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}-1}}$

وبمثل هذا يؤل الامر الى البحث عن $\text{ق}\ \frac{\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}-2}}$ وهلم جرا وحيث كان ن عددا صحيحا موجبا فيتوصل أخيرا الى البحث عن $\text{ق}\ \frac{\text{ء}\text{ع}}{1+\text{ع}^2}$ الذي يساوي قوس ظا ع وحينئذ

يوجد $\text{ق}\ \frac{\text{ء}\text{ع}}{(1+\text{ع}^2)^{\text{ن}}}$ معينا وبذلك يتعين $\text{ق}\ \frac{(\text{ف}\,\text{ل}+\text{ى})\,\text{ء}\text{س}}{[(\text{س}-\text{ل})^2+\text{ك}^2]^{\text{ن}}}$

تمرينات

١ $\quad \text{ق}\ \frac{\text{س}^2-\text{س}+2}{\text{س}^4-2\text{س}^2+4}\ \text{ء}\text{س} = \frac{1}{3}\ \text{لو}\ \frac{(\text{س}-2)(\text{س}+1)^2}{(\text{س}-1)(\text{س}+2)^2}$

$$\text{٢} \quad \int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{\text{٣}}(\text{س} - \text{١})} = \frac{\text{١}}{\text{٢س}^{\text{٢}}} + \frac{\text{١}}{\text{س}} + \text{لوَ}\,\frac{\text{س}-\text{١}}{\text{س}} + \text{ث}$$

$$\text{٣} \quad \int \frac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٤}} + \text{س}^{\text{٣}} - \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{٢}}\,\text{ءس} = \frac{\text{١}}{\text{٦}(\text{س}-\text{١})} + \frac{\text{٢٣}}{\text{٣٦}}\,\text{لوَ}\,(\text{س} - \text{١})$$

$$- \frac{\text{٣}}{\text{٤}}\,\text{لوَ}(\text{س} + \text{١}) + \frac{\text{١٠}}{\text{٩}}\,\text{لوَ}(\text{س} + \text{٢})$$

$$\text{٤} \quad \int \frac{(\text{س}^{\text{٣}} - \text{١})\,\text{ءس}}{\text{س}^{\text{٥}} - \text{٢س}^{\text{٤}} + \text{٨س}^{\text{٢}} - \text{١٢س} + \text{٨}} = \frac{\text{٩}}{\text{١٠٠}}\,\text{لوَ}\,\frac{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{٢}}}{\text{س} + \text{٢}}$$

$$- \frac{\text{٧س} + \text{٢}}{\text{٢٠}(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{٢})} + \frac{\text{٣٨}}{\text{١٠٠}}\,\text{قوس طا}(\text{س} - \text{١}) + \text{ث}$$

الفصل الثالث

في حساب تكامل الدوال التفاضلية الغير جذرية

في الدوال التي لا تحتوى الا على كميات غير جذرية ذات حد واحد

بند ٢٢ كل دالة لاتحتوى الا على حدود غير جذرية يمكن دائما أخذ تكاملها مثلا لنفرض ان المطلوب ايجاد

$$\int \frac{(\text{١} + \sqrt{\text{س}} - \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٢}}})\,\text{ءس}}{\text{١} + \sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}$$

فهذا التكامل يمكن وضعه هكذا

$$\int \frac{(\text{١} + \text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} - \text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}})\,\text{ءس}}{\text{١} + \text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}}$$

فاذا جعل

$$\text{س} = \text{ع}^{\text{٦}} \quad \text{يكون} \quad \text{ءس} = \text{٦ع}^{\text{٥}}\,\text{ءع}$$

ويوجد هذا الكسر الجذرى وهو

$$\frac{(\text{١} + \text{ع}^{\text{٣}} - \text{ع}^{\text{٤}})\,\text{٦ع}^{\text{٥}}\,\text{ءع}}{\text{١} + \text{ع}^{\text{٢}}} \quad \text{او}$$

$$٦ \, ٥ \, ر \left(- ر^{٧} + ر^{٦} + ر^{٥} - ر^{٤} + ر^{٢} - ١ + \frac{١}{١ + ر^{٢}} \right)$$

وهذه الدالة تكاملها هو

$$- \frac{٣}{٤} ر^{٨} + \frac{٦}{٧} ر^{٧} + ر^{٦} - \frac{٦}{٥} ر^{٥} + ٢ ر^{٣} - ٦ ر + ٦ \text{ قوس طا } ر + ث$$

ولم يبق حينئذ الا التعويض $ر$ بالكمية $\sqrt[٦]{س}$

بـ٢٣ـد يمكن ايلولة كل دالة لا تشتمل الا على جذور موضوعة على كمية واحدة ذات حدين بدرجة اولى الى الحالة المتقدمة مثلا ليكن المطلوب البحث عن

$$\text{ط} \frac{\left[س^{٢} + \sqrt[٣]{(حـ س + ء)^{٢}} \right] ٥ س}{س + \sqrt{حـ س + ء}}$$

فيوضع $حـ س + ء = ر^{٦}$ فيكون

$$س = \frac{ر^{٦} - ء}{حـ} \text{ , } ٥ س = \frac{٦ ر^{٥} ٥ ر}{حـ} \text{ , } \sqrt[٣]{(حـ س + ء)^{٢}} = ر^{٤}$$

وحينئذ يؤل الامر الى أخذ تكامل هذا الكسر الجذرى وهو

$$\frac{٦}{حـ^{٢}} \frac{ر^{٥} \left[(ر^{٦} - ء)^{٢} + حـ^{٢} ر^{٤} \right] ٥ ر}{ر^{٦} - ء + حـ ر^{٣}}$$

فى الدوال التى تشتمل على جذر بدرجة ثانية

بـ٢٤ـد ولنتصدى الآن لحساب تكامل الدوال التى تشتمل على الجذر التربيعى لكمية ذات ثلاثة حدود بدرجة ثانية ولتكن

$$حـ + ء س + س^{٢} \quad \text{أو} \quad حـ + ء س - س^{٢}$$

(ومن المعلوم أنه يمكن دائما ايلولة ذات الثلاثة حدود الى احدى هاتين الصورتين باخراج معامل $س^{٢}$ من تحت علامة الجذر باشارة +) فنقول وبالله التوفيق

ان الطريقة المستعملة لذلك تنحصر فى تحويل $س$ و $\sqrt{حـ + ء س \pm س^{٢}}$ و $٥ س$ الى دوال جذرية لمتغير جديد بحيث تؤل المسئلة الى أخذ تكامل دالة جذرية

ولنفرض أولا أن الحد المحتوى على $س^{٢}$ تحت علامة الجذر مسبوق باشارة + فيمكن بدون اختلاف أن يجعل

$$\sqrt{حـ + ء س + س^{٢}} = ع \pm س$$

ولنأخذ ع ـ س فبتربيع الطرفين يحدث

$$ح + دس = ع^{2} - 2سع$$

ويكون

$$س = \frac{ع^{2} - ح}{د + 2ع} \quad , \qquad (1)$$

$$\sqrt{ح + دس + س^{2}} = ع - س = \frac{ح + دع + ع^{2}}{د + 2ع} \quad , \qquad (2)$$

$$ىس = \frac{(د + 2ع)\, 2ع\, ىع - (ع^{2} - ح)\, 2\, ىع}{(د + 2ع)^{2}} = \frac{2(ح + دع + ع^{2})\, ىع}{(د + 2ع)^{2}} \qquad (3)$$

وبوضع المقادير (١) و (٢) و (٣) فى الدالة المعلومة تؤول الى دالة جذرية للمتغير ع

بند ٢٥ متى كان ح > ٠ يمكن أيضا أن يجعل

$$\sqrt{ح + دس + س^{2}} = \sqrt{ح} + سع$$

وبالتربيع وقسمة الطرفين على س يحدث

$$د + س = 2ع\sqrt{ح} + سع^{2}$$

واذن يكون

$$س = \frac{2ع\sqrt{ح} - د}{1 - ع^{2}} \quad , \qquad (4)$$

$$\sqrt{ح + دس + س^{2}} = \frac{ع^{2}\sqrt{ح} - دع + \sqrt{ح}}{1 - ع^{2}} \quad , \qquad (5)$$

$$ىس = \frac{2\left(ع^{2}\sqrt{ح} - دع + \sqrt{ح}\right) ىع}{(1 - ع^{2})^{2}} \qquad (6)$$

بند ٢٦ (مثالان) الاول ـ ليكن المطلوب حساب

$$\int \frac{ىس}{\sqrt{ح + دس + س^{2}}}$$

فلذلك يستعمل التحويل الاول بأن يجعل

$$\sqrt{ح + دس + س^{2}} = ع - س$$

وبموجب القانونين (٢) و (٣) يحدث

$$\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}} = \int \frac{\text{د ع}}{\frac{\text{ء}}{2} + \text{ع}} = \text{لو}\left(\frac{\text{ء}}{2} + \text{ع}\right)$$

وحينئذ اذا عوّض ع بمقداره وهو $\text{س} + \sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}$ يحدث

$$\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}} = \text{لو}\left(\frac{\text{ء}}{2} + \text{س} + \sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}\right) + \text{ث}$$

ومتى كان $\text{ء} = 0$ يؤل هذا القانون الى

$$\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{س}^{2}}} = \text{لو}\left(\text{س} + \sqrt{\text{ح} + \text{س}^{2}}\right) + \text{ث}$$

الثانى ـ ليكن المطلوب حساب

$$\int \frac{(\text{ن س} + \text{ف})\,\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}}$$

فمن السهل رجوع هذا التكامل الى المتقدم لان

$$\text{د}\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}} = \frac{(\text{ء} + 2\text{س})\,\text{د س}}{2\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}} = \frac{\left(\frac{\text{ء}}{2} + \text{س}\right)\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}}$$

ولينتبه الى أنه لو كان بسط الدالة المفروضة هو $\frac{\text{ء}}{2} + \text{س}$ لامكن أخذ تكامل هذه الدالة مباشرة ومن الواضح أن

$$\frac{(\text{ن س} + \text{ف})\,\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}} = \frac{\text{ن}\left(\frac{\text{ء}}{2} + \text{س}\right)\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}} + \frac{\left(\text{ف} - \frac{\text{ن ء}}{2}\right)\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}}$$

وحينئذ يكون

$$\int \frac{(\text{ن س} + \text{ف})\,\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}} = \text{ن}\int \frac{\left(\frac{\text{ء}}{2} + \text{س}\right)\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}} + \left(\text{ف} - \frac{\text{ن ء}}{2}\right)\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}}$$

$$= \text{ن}\sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}} + \left(\text{ف} - \frac{\text{ن ء}}{2}\right)\text{لو}\left(\frac{\text{ء}}{2} + \text{س} + \sqrt{\text{ح} + \text{ء س} + \text{س}^{2}}\right) + \text{ث}$$

بند ٢٧ ولنشتغل الآن بأخذ تكامل

$$\text{د}\left(\text{س} \text{ , } \sqrt{\text{ح} + \text{ى}\text{س} + \text{س}^2}\right) \text{ء}\text{س}$$

فنقول وبالله التوفيق

اذا كان ح > ٠ يمكن استعمال التحويل الثانى بأن يوضع

$$\sqrt{\text{ح} + \text{ى}\text{س} + \text{س}^2} = \sqrt{\text{ح}} + \text{س}\text{ع}$$

وحينئذ يكون

$$\text{ى} - \text{س} = ٢\text{ع}\sqrt{\text{ح}} + \text{س}\text{ع}$$

واذا يكون

$$\text{س} = \frac{\text{ى} - ٢\text{ع}\sqrt{\text{ح}}}{١ + \text{ع}^2} \text{ ,} \qquad (١)$$

$$\sqrt{\text{ح} + \text{ى}\text{س} + \text{س}^2} = \frac{\sqrt{\text{ح}} + \text{ى}\text{ع} - \text{ع}^2\sqrt{\text{ح}}}{١ + \text{ع}^2} \text{ ,} \qquad (٢)$$

$$\text{ء}\text{س} = \frac{٢\left(\text{ع}^2\sqrt{\text{ح}} - \text{ى}\text{ع} - \sqrt{\text{ح}}\right)\text{ء}\text{ع}}{\left(١ + \text{ع}^2\right)^2} \qquad (٣)$$

بند ٢٨ وهنالك تحويل ثالث به يمكن حساب تكامل

$$\text{د}\left(\text{س} \text{ , } \sqrt{\text{ح} + \text{ى}\text{س} \pm \text{س}^2}\right) \text{ء}\text{س}$$

متى كان جذرا ذات الثلاثة حدود $\text{ح} + \text{ى}\text{س} \pm \text{س}^2$ حقيقيين

ولذلك نفرض أولا أن اشارة الحد س^2 الموجود تحت علامة الجذر هى +

ولنفرض أن ل و ے جذرا المعادلة

$$\text{ح} + \text{ى}\text{س} + \text{س}^2 = ٠$$

فيكون

$$\text{ح} + \text{ى}\text{س} + \text{س}^2 = (\text{س} - \text{ل})(\text{س} - \text{ے})$$

ولنجعل

$$\sqrt{\text{ح} + \text{ى}\text{س} + \text{س}^2} = (\text{س} - \text{ل})\text{ع} \quad \text{أى} \quad \text{ح} + \text{ى}\text{س} + \text{س}^2 = (\text{س} - \text{ل})^2\text{ع}^2$$

فيكون

$$(س - ل)(س - ى) = (س - ل)^2 ع^2 \quad \text{أو} \quad س - ى = (س - ل) ع^2$$

وبناء على ذلك يكون

$$س = \frac{ى - ل ع^2}{١ - ع^2} \quad ، \qquad (١)$$

$$\sqrt{ح + د س + س^2} = (س - ل) ع = ع \left(\frac{ى - ل ع^2}{١ - ع^2} - ل \right) = \frac{(ى - ل) ع}{١ - ع^2} \quad ، \qquad (٢)$$

$$ء س = \frac{-(١ - ع^2) ٢ ل ع ء ع + (ى - ل ع^2) ٢ ع ء ع}{(١ - ع^2)^2} = \frac{٢ (ى - ل) ع ء ع}{(١ + ع^2)^2} \qquad (٣)$$

ويلزم تغيير هذه القوانين متى كان الحد $س^2$ مسبوقا بإشارة $-$ فيكتب في هذه الحالة

$$ح + د س - س^2 = (س - ل)(ى - س)$$

ثم يجعل

$$\sqrt{ح + د س - س^2} = (س - ل) ع$$

فيكون

$$ى - س = (س - ل) ع^2$$

وإذن يكون

$$س = \frac{ى + ل ع^2}{١ + ع^2} \quad ، \qquad (٤)$$

$$\sqrt{ح + د س - س^2} = (س - ل) ع = \frac{(ى - ل) ع}{١ + ع^2} \quad ، \qquad (٥)$$

$$ء س = \frac{(١ + ع^2) ٢ ل ع ء ع - (ى + ل ع^2) ٢ ع ء ع}{(١ + ع^2)^2} = \frac{٢ (ل - ى) ع ء ع}{(١ + ع^2)^2} \qquad (٦)$$

بند ٢٩ — يمكن تطبيق هذه الطريقة لحساب

$$\int \frac{ء س}{\sqrt{ح + د س - س^2}}$$

غير أن الابسط ايلولة هذا التكامل الى

$$\int \frac{\text{ى}\text{ر}}{\sqrt{1-\text{ر}^2}}$$

ولذلك يكتب

$$\int \frac{\text{ى}\text{س}}{\sqrt{\text{ح}+\text{ء}\text{س}-\text{س}^2}} = \int \frac{\text{ى}\text{س}}{\sqrt{\text{ح}+\frac{\text{ء}^2}{٤}-\left(\text{س}-\frac{\text{ء}}{٢}\right)^2}}$$

ثم يجعل

$$\frac{\text{ء}}{٢}-\text{س} = \text{ر}\sqrt{\text{ح}+\frac{\text{ء}^2}{٤}} \quad \text{فيكون} \quad \text{ى}\text{س} = -\text{ى}\text{ر}\sqrt{\text{ح}+\frac{\text{ء}^2}{٤}}$$

واذن يكون

$$\int \frac{\text{ى}\text{س}}{\sqrt{\text{ح}+\text{ء}\text{س}-\text{س}^2}} = -\int \frac{\text{ى}\text{ر}}{\sqrt{1-\text{ر}^2}} = \text{قوس حا}\,\frac{\text{ء}-٢\text{س}}{\sqrt{٤\text{ح}+\text{ء}^2}} + \text{ث}$$

واذا كان $\text{ح} = ٠$ يكون

$$\int \frac{\text{ى}\text{س}}{\sqrt{\text{ء}\text{س}-\text{س}^2}} = \text{قوس حا}\,\frac{\text{ء}-٢\text{س}}{\text{ء}} + \text{ث}$$

بـ ٣٠ ـ د بالطرق المتقدمة يمكن أخذ تكامل أى دالة جذرية بالصورة

$$\text{ء}\left(\text{س}\ ,\ \sqrt{\text{س}+\text{ح}}\ ,\ \sqrt{\text{س}+\text{ء}}\right)\text{ى}\text{س}$$

تشتمل على جذرين تربيعين موضوعين على كميتين ذاتى حدين بدرجة أولى لانه لو جعل

$$\sqrt{\text{س}+\text{ح}} = \text{ع}$$

يكون

$$\text{س} = \text{ع}^2-\text{ح}\ ,\quad \sqrt{\text{س}+\text{ء}} = \sqrt{\text{ع}^2-\text{ح}+\text{ء}}\ ,\quad \text{ى}\text{س} = ٢\text{ع}\,\text{ى}\text{ع}$$

وحينئذ تؤول الدالة $\text{ء}\left(\text{س}\ ,\ \sqrt{\text{س}+\text{ح}}\ ,\ \sqrt{\text{س}+\text{ء}}\right)\text{ى}\text{س}$ الى دالة مثل

$\text{ء}_1\left(\text{ع}\ ,\ \sqrt{\text{ع}^2-\text{ح}+\text{ء}}\right)\text{ى}\text{ع}$ يمكن أخذ تكاملها بموجب ما تقدم فى هذا الفصل

في التفاضلات ذات الحدين وفي حالات امكان أخذ التكامل

بند ٣١ التفاضل ذو الحدين ما كان بالصورة

$$س^م (١ + ب س^ن)^ع ءس$$

التي فيها م و ن عددان صحيحان فان كانا كسريين يمكن تحويلهما الى عددين صحيحين مثلا اذا كان التفاضل ذو الحدين المعلوم هو $س^{\frac{٢}{٣}} (١ + ب س^{\frac{١}{٢}})^ع ءس$ يجعل $س = ع^٦$ فيكون $ءس = ٦ع^٥ ءع$ ويؤل الامر الى أخذ تكامل $٦ ع^٩ (١ + ب ع^٣)^ع ءع$ وهذا تفاضل ذو حدين فيه اسا ع خارج القوسين وداخلهما عددان صحيحان

وزيادة على ذلك يمكن ان يفرض ان $ن >$. لانه اذا اريد أخذ تكامل $س^م (١ + ب س^{-ن})^ع ءس$ يكفي جعل $س = \frac{١}{ع}$ لاجل ايلولة عملية حساب التكامل الى حساب تكامل $-ع^{-م-٢} (١ + ب ع^ن)^ع ءع$ الذي فيه أس المتغير داخل القوسين موجب

وأما ع فيجب فرضه كسريا لانه اذا كان ع عددا صحيحا موجبا تحدث بتحليل $(١ + ب س^ن)^ع$ كمية كثيرة الحدود صحيحة واذا كان ع صحيحا وسالبا تكون المسئلة أخذ تكامل كسر جذري وفي كلتي هاتين الحالتين يتحصل التكامل بموجب الطرق التي ذكرناها فيما تقدم

بند ٣٢ ولاجل ايجاد أحوال أخرى يمكن فيها أخذ تكامل $س^م (١ + ب س^ن)^ع ءس$ يوضع

$$١ + ب س^ن = ع$$

فيكون

$$س = \left(\frac{ع - ١}{ب}\right)^{\frac{١}{ن}} \text{ , } ءس = \frac{١}{ن ب} \left(\frac{ع - ١}{ب}\right)^{\frac{١}{ن} - ١} ءع$$

ويؤل التفاضل الى

$$\frac{١}{ن ب} ع^ع \left(\frac{ع - ١}{ب}\right)^{\frac{م + ١}{ن} - ١} ءع$$

وتكون عملية أخذ التكامل ممكنة اذا كان

$$\frac{م + ١}{ن} = \text{عددا صحيحا} \qquad (١)$$

وفي الواقع اذا كان ع مساويا للكسر $\frac{ل}{ر}$ فبجعل $ع = ص^ر$ يؤل الامر الى حالة دالة جذرية وحينئذ تكون عملية أخذ التكامل ممكنة

بند ٣٣ وهناك حالة أخرى فيها عملية أخذ التكامل ممكنة فبكتابة التفاضل ذى الحدين بهذه الصورة

$$س^{م+ن ع}(ا س^{-ن}+ب)^{ع} د س$$

يؤل الشرط المتقدم ذكره الى $\frac{م+ن ع+1}{-ن}$ أى

$$\frac{م+1}{ن}+ع = \text{عددا صحيحا} \qquad (٢)$$

وهذا شرط قد يستوفى حين لم يستوف الاول

مثلا اذا اعتبر التفاضل $س^{٤}(ا+ب س^{٣})^{\frac{1}{3}} د س$ يكون

$$\frac{٤+١}{٣}=\frac{٥}{٣} \quad , \quad \frac{٤+١}{٣}+\frac{١}{٣}=٢$$

و يوجد الشرط الثانى مستوفيا فقط

فى اختصار أس س خارج القوسين

بند ٣٤ حيث انه لايمكن على العموم أخذ تكامل التفاضل ذى الحدين $س^{م}(ا+ب س^{ن})^{ع} د س$ فيلزم تحويله الى تكاملات أبسط منه ويتوصل اليها بتطبيق قاعدة أخذ التكامل بالتجزئة ولذا يكتب

$$\int س^{م}(ا+ب س^{ن})^{ع} د س = \int س^{م-ن+1}(ا+ب س^{ن})^{ع} س^{ن-1} د س = \int ى د و$$

وذلك بجعل

$$ى = س^{م-ن+1} \quad , \quad و = \frac{(ا+ب س^{ن})^{ع+1}}{ن ب (ع+1)}$$

واذن يكون

$$\int س^{م}(ا+ب س^{ن})^{ع} د س = س^{م-ن+1}\frac{(ا+ب س^{ن})^{ع+1}}{ن ب(ع+1)} - \frac{م-ن+1}{ن ب(ع+1)}\int س^{م-ن}(ا+ب س^{ن})^{ع+1} د س \qquad (١)$$

والتكامل الجديد الموجود فى هذا القانون يكون أبسط من التكامل المفروض اذا كان م موجبا وأكبر من ن وكان ع سالبا لان ع+١ يكون مقداره المطلق اذذاك $<$ ع الا انه يمكن ايجاد قانون فيه أس س خارج القوسين يكون منقوصا فقط ولذلك يكتب

$$\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}+1}=\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})$$

$$=\text{ا}\,\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\int\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}+1}\,\text{د}\text{س}$$

$$=\text{ا}\int\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}+\text{ب}\int\text{س}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}$$

وبوضع هذا المقدار في المعادلة (١) يحدث

$$\int\text{س}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}$$

$$=\frac{\text{س}^{\text{م}-\text{ن}+1}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}+1}}{\text{ن}\,\text{ب}(\text{ع}+1)}-\frac{\text{م}-\text{ن}+1}{\text{ن}\,\text{ب}(\text{ع}+1)}\,\text{ا}\int\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}$$

$$-\frac{\text{م}-\text{ن}+1}{\text{ن}\,\text{ب}(\text{ع}+1)}\,\text{ب}\int\text{س}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}$$

وحينئذ اذا حول الحد الاخير الى الطرف الاول واختصر يحدث

$$\left.\begin{array}{l}\int\text{س}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}\\ =\dfrac{\text{س}^{\text{م}-\text{ن}+1}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}+1}}{\text{ب}(\text{ن}\,\text{ع}+\text{م}+1)}-\dfrac{\text{ا}(\text{م}-\text{ن}+1)}{\text{ب}(\text{ن}\,\text{ع}+\text{م}+1)}\int\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}\end{array}\right\}\quad(\text{آ})$$

وحينئذ تؤل مسئلة البحث عن $\int\text{س}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}$ الى البحث عن

$$\int\text{س}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}$$

وبمثل ذلك يتعلق هذا التكامل الاخير بهذا

$$\int\text{س}^{\text{م}-2\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}$$

وهلم جرا بحيث اذا كان م موجبا وأكبر من ن وفرض ان ر ن أكبر مضاعف لعدد ن أقل من م ترجع العملية بعد عمليات اختصار عددها ر الى

$$\int\text{س}^{\text{م}-\text{ر}\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{د}\text{س}$$

فاذا كان $\text{م}-\text{ى}\,\text{ن}=\text{ن}-1$ فان هذا التكامل الاخير يمكن تحصيله مباشرة لانه يؤول اذ ذاك الى

$$\int \text{س}^{\text{ن}-1}(1+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{ء}\text{س}=\frac{(1+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}+1}}{\text{ن}\,\text{ب}(\text{ع}+1)}+\text{ث}$$

لكن المتساوية $\text{م}-\text{ى}\,\text{ن}=\text{ن}-1$ تؤول الى $\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}=\text{ى}+1$ ويكون الشرط الاول من شرطى امكان أخذ التكامل مستوفيا

ومتى كان $\text{ن}\,\text{ع}+\text{م}+1=0$ يؤول الطرف الثانى من معادلة (آ) الى $\infty-\infty$ ويكون هذا القانون ضالا لكن حيث ان $\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}+\text{ع}$ يساوى صفرا أى يساوى عددا صحيحا فيقع فى الحالة الثانية من امكان أخذ التكامل و يمكن تحصيل التكامل مباشرة

فى اختصار أس ذات الحدين

بند ٣٥ فى التحويل (آ) كان الاختصار جاريا على أس سـ خارج القوسين بخلاف العامل $(1+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}$ فانه لم يتغير أصلا و يمكن الآن اجراء العكس أى ترك العامل $\text{س}^{\text{م}}$ باقيا على حاله و ايلولة البحث عن التكامل المفروض الى البحث عن تكامل فيه أس $(1+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}$ منقوصا عن أصله بعدة آحاد

لان

$$\text{س}^{\text{م}}(1+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{ء}\text{س}=(1+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{ء}\,\frac{\text{س}^{\text{م}+1}}{\text{م}+1}$$

وحينئذ اذا أخذ التكامل بالتجزئ يحدث

$$(\text{ب})\quad \int \text{س}^{\text{م}}(1+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}\,\text{ء}\text{س}=\frac{\text{س}^{\text{م}+1}(1+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}}}{\text{م}+1}-\frac{\text{ن}\,\text{ب}\,\text{ع}}{\text{م}+1}\int \text{س}^{\text{م}+\text{ن}}(1+\text{ب}\,\text{س}^{\text{ن}})^{\text{ع}-1}\,\text{ء}\text{س}$$

وبهذا القانون ينقص اس ذات الحدين بواحد الا أن اس سـ خارج القوسين يزيد آحادا قدرها ن ولاجل اختصار هذا الاس الاخير يغير م بالمقدار $\text{م}+\text{ن}$ و ع بالمقدار $\text{ع}-1$ فى المعادلة (آ) فيحدث

$$\int س^{م+ن}(ا+ب\,س^{ن})^{ع-1}\,ءس$$

$$=\frac{س^{م+1}(ا+ب\,س^{ن})^{ع}}{ب(ن\,ع+م+1)}-\frac{(م+1)\,ا}{ب(ن\,ع+م+1)}\int س^{م}(ا+ب\,س^{ن})^{ع-1}\,ءس$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة (ب) يحدث

$$\int س^{م}(ا+ب\,س^{ن})^{ع}\,ءس=\frac{س^{م+1}(ا+ب\,س^{ن})^{ع}}{م+1}-\frac{ن\,ع\,س^{م+1}(ا+ب\,س^{ن})^{ع}}{(م+1)(ن\,ع+م+1)}$$

$$+\frac{ن\,ا\,ع}{ن\,ع+م+1}\int س^{م}(ا+ب\,س^{ن})^{ع-1}\,ءس$$

وبالاختصار يحدث

$$\left.\begin{aligned}&\int س^{م}(ا+ب\,س^{ن})^{ع}\,ءس\\&=\frac{س^{م+1}(ا+ب\,س^{ن})^{ع}}{ن\,ع+م+1}+\frac{ن\,ع\,ا}{ن\,ع+م+1}\int س^{م}(ا+ب\,س^{ن})^{ع-1}\,ءس\end{aligned}\right\}(\bar{ب})$$

وبواسطة هذا القانون ينقص بالتوالي من ع جميع الآحاد التي يحتوي عليها هذا الاس بيد القانون ($\bar{ب}$) يصير ضالا متى كان

$$ن\,ع+م+1=0$$

الا أنه اذ ذاك يقع في الحالة الثانية من الاحوال التي يمكن فيها أخذ التكامل ويتحصل على التكامل المطلوب بتغيير المتغير

والحاصل أنه باستعمال القانونين ($\bar{ا}$) و ($\bar{ب}$) يتعلق التكامل $\int س^{م}(ا+ب\,س^{ن})^{ع}\,ءس$ حينما يكون م و ع موجبين بهذا التكامل البسيط وهو

$$\int س^{م-ر\,ن}(ا+ب\,س^{ن})^{ع-ك}\,ءس$$

الذي فيه ر ن أكبر مضاعف لعدد ن أقل من م و ك الجزء الصحيح للعدد ع

مثلا يحول التكامل

$$\int س^{٧}(ا+ب\,س^{٢})^{\frac{٥}{٢}}\,ءس$$

الى $\int س(ا+ب\,س^{٢})^{\frac{١}{٢}}\,ءس$ بايلولته على التوالي بواسطة القانون ($\bar{ا}$) الى هذين التكاملين

$$\int س^{٤}(ا+ب\,س^{٣})^{\frac{٥}{٢}}\,ء\,س \quad و \quad \int س\,(ا+ب\,س^{٣})^{\frac{٥}{٢}}\,ء\,س$$

و يحوّل هذا الاخير بواسطة القانون (ب) الى هذين

$$\int س\,(ا+ب\,س^{٣})^{\frac{٣}{٢}}\,ء\,س \quad و \quad \int س\,(ا+ب\,س^{٣})^{\frac{١}{٢}}\,ء\,س$$

قانونى الاختصار فى الحالة التى يكون فيها الاسان م و ع سالبين

بند ٣٧ متى كان الاسان م و ع سالبين فانه لا يمكن تحويل التفاضل ذى الحدين بواسطة القانونين (أ) و (ب) الى تفاضل ذى حدين أخصر منه الا أن هذين القانونين يوصلان الى قانونين جديدين يجرى بهما الاختصار فى هذه الحالة

فلنشتغل أولا بتنقيص اس س خارج القوسين فنقول و بالله التوفيق

لاجل ذلك نستخرج من المعادلة (أ) مقدار التكامل $\int س^{م-ں}(ا+ب\,س^{ں})^{ع}\,ء\,س$ فيحدث

$$\int س^{م-ں}(ا+ب\,س^{ں})^{ع}\,ء\,س$$

$$= \frac{س^{م-ں+١}(ا+ب\,س^{ں})^{ع+١}}{ا(م-ں+١)} - \frac{ب(م+ں ع+١)}{ا(م-ں+١)}\int س^{م}(ا+ب\,س^{ں})^{ع}\,ء\,س$$

ثم نغير م − ں بالعدد − م أى نغير م بالعدد − م + ں فيحدث

$$(ح)\quad \begin{cases} \int س^{-م}(ا+ب\,س^{ں})^{ع}\,ء\,س = -\dfrac{س^{-م+١}(ا+ب\,س^{ں})^{ع+١}}{ا(م-١)} \\ \quad + \dfrac{ب(ں ع+ں-م+١)}{ا(م-١)}\int س^{-م+ں}(ا+ب\,س^{ں})^{ع}\,ء\,س \end{cases}$$

و بتكرار استعمال هذا القانون يمكن ايلولة التكامل المطلوب ايجاده الى هذا

$$\int س^{-م+(ک+١)ں}(ا+ب\,س^{ں})^{ع}\,ء\,س$$

الذى فيه کں أكبر مضاعف لعدد ں منحصر فى م

فاذا كان

$$-م+(ک+١)ں = ں-١$$

يؤل التكامل الاخير الى

$$\int س^{ن-1}(ا+ب س^{ن})^{ح} ء س = \frac{(ا+ب س^{ن})^{ح+1}}{ن ب (ح+1)} + ث$$

وحيث ان

$$\frac{-م+1}{ن} = -ح = \text{عددا صحيحا}$$

فيقع فى الحالة الاولى من حالات امكان أخذ التكامل

ب^{38}ـ ومتى كان ح سالبا يستخرج من القانون (ب)

$$\int س^{م}(ا+ب س^{ن})^{ح-1} ء س$$

$$= -\frac{س^{م+1}(ا+ب س^{ن})^{ح}}{ا ن ح} + \frac{ن ح + م + 1}{ا ن ح}\int س^{م}(ا+ب س^{ن})^{ح} ء س$$

فاذا غير ح − ١ فى هذا الناتج بالعدد −ح أى غير ح بالعدد −ح + ١ يحدث

$$(ح)\ \left\{\begin{aligned} \int س^{م}(ا+ب س^{ن})^{-ح} ء س &= \frac{س^{م+1}(ا+ب س^{ن})^{-ح+1}}{ا ن (ح-1)} \\ &- \frac{م+ن+1-ح ن}{ا ن (ح-1)}\int س^{م}(ا+ب س^{ن})^{-ح+1} ء س \end{aligned}\right.$$

فاذا كان ح > ١ يكون المقدار المطلق لاس ذات الحدين قد نقص بواحد وباستمرار الاختصار ينتهى حينئذ باياولة هذا الاس الى أن يكون محصورا بين ٠ و ١

واذا كان ح = ١ يصير هذا القانون ضالا الاان هذه الحالة احدى الحالات التى يمكن فيها أخذ التكامل

ب^{39}ـ كل تفاضل بالصورة

$$س^{ك}(ا س^{ر} + ب س^{ط})^{ح} ء س$$

يمكن وضعه بالصورة $س^{ك+ر ح}(ا+ب س^{ط-ر})^{ح} ء س$ ويصير حينئذ تفاضلا ذا حدين

بند ٤ د بالقوانين المتقدمة يمكن أخذ تكامل

$$\frac{س^{م}\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}$$

الذى يقع دائما فى احدى الحالتين اللتين يمكن فيهما أخذ التكامل فبواسطة القانون (أ) يحدث

$$\int\frac{س^{م}\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}=-\frac{س^{م-١}\sqrt{١-س^{٢}}}{م}+\frac{م-١}{م}\int\frac{س^{م-٢}\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}$$

وبجعل م = ١ و ٣ و ٥ و ٧ و ... بالتوالى يوجد

$$\int\frac{س\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}=-\sqrt{١-س^{٢}}\quad و$$

$$\int\frac{س^{٣}\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}=-\frac{س^{٢}}{٣}\sqrt{١-س^{٢}}+\frac{٢}{٣}\int\frac{س\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}\quad و$$

$$\int\frac{س^{٥}\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}=-\frac{س^{٤}}{٥}\sqrt{١-س^{٢}}+\frac{٤}{٥}\int\frac{س^{٣}\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}\quad و$$

....

ومن هنا يكون

$$\int\frac{س\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}=-\sqrt{١-س^{٢}}\quad و$$

$$\int\frac{س^{٣}\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}=-\left(\frac{س^{٢}}{٣}+\frac{٢}{١\times٣}\right)\sqrt{١-س^{٢}}\quad و$$

$$\int\frac{س^{٥}\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}=-\left(\frac{س^{٤}}{٥}+\frac{٤س^{٢}}{٣\times٥}+\frac{٢\times٤}{١\times٣\times٥}\right)\sqrt{١-س^{٢}}$$

وعلى العموم اذا كان م فرديا يكون

$$\int\frac{س^{م}\,ءس}{\sqrt{١-س^{٢}}}$$

$$=-\left[\frac{س^{م-١}}{م}+\frac{(م-١)\,س^{م-١}}{(م-٢)\,م}+\cdots+\frac{٢\times٤\times\cdots(م-١)}{١\times٣\times\cdots\times م}\right]\sqrt{١-س^{٢}}+ث$$

واذا كان م زوجيا يتوصل الى هذا القانون وهو

$$\int \frac{س^م \, ى س}{\sqrt{١ - س^٢}}$$

$$= - \left[\frac{س^{م-١}}{م} + \frac{(م-١) س^{م-٣}}{(م-٢) م} + \cdots + \frac{١ \times ٣ \times ٥ \cdots (م-١)}{٢ \times ٤ \times ٦ \cdots م} س \right] \sqrt{١ - س^٢}$$

$$+ \frac{١ \times ٣ \times ٥ \cdots (م-١)}{٢ \times ٤ \times ٦ \cdots م} \text{ قوس حا } س + ث$$

الفصـــــل الرابـع

فى حساب تـكامل الدوال العاليــة

فى الحالات التى يمكن ايلولتها الى الدوال الجـــبرية

بـ٤٤ـد يمكن ايلولة التـكاملات التى تحتوى تحت علامة التـكامل على دالة جبرية لدالة عاليـة مضروبة فى تفاضل هذه الدالة العالية الى تكاملات دوال جبرية بطريقة الوضع وذلك كالتكاملات

$$\int ى(لوَ س) \frac{ى س}{س} \text{ ، } \int ى(حـ^س) حـ^س ى س \text{ ، } \int ى(ﻫ^س) ﻫ^س ى س \text{ ، }$$

$$\int ى(حا س) حتا س ى س \text{ ، } \int ى(حتا س) حا س ى س \text{ ، }$$

$$\int ى(قوس حا س) \frac{ى س}{\sqrt{١ - س^٢}} \text{ ، } \int ى(قوس طا س) \frac{ى س}{١ + س^٢} \text{ ، } \ldots$$

مثلا اذا أريد ايجاد

$$\int (لوَ س)^ن \frac{ى س}{س}$$

يجعل $لوَ س = ع$ فيكون $\frac{ى س}{س} = ى ع$ واذن يكون

$$\int (لوَ س)^ن \frac{ى س}{س} = \int ع^ن ى ع = \frac{ع^{ن+١}}{ن+١} + ث$$

أى

$$\int (لوَ س)^ن \frac{ى س}{س} = \frac{(لوَ س)^{ن+١}}{ن+١} + ث$$

في حساب تكامل $\text{ع}^{\text{ن}}\,\text{ح}\,\text{ءس}$

ب ٤٢ د لنبحث عن تكامل دالة مثل $\text{ع}^{\text{ن}}\,\text{ح}\,\text{ءس}$ فيها ع دالة عالية للمتغير س و ح دالة جبرية لهذا المتغير فنقول لذلك نضع

$$\int \text{ح}\,\text{ءس}=\text{ط}\ ,\quad \int \text{ط}\,\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\,\text{ءس}=\text{ى}\ ,\quad \int \text{ى}\,\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}\,\text{ءس}=\text{ك}\ ,\ \ldots$$

فيكون

$$\int \text{ع}^{\text{ن}}\,\text{ح}\,\text{ءس}=\int \text{ع}^{\text{ن}}\,\text{ءط}=\text{ط}\,\text{ع}^{\text{ن}}-\text{ن}\int \text{ع}^{\text{ن}-١}\,\text{ط}\,\text{ءع}\ ,$$

$$\int \text{ع}^{\text{ن}-١}\,\text{ط}\,\text{ءع}=\int \text{ع}^{\text{ن}-١}\,\text{ءى}=\text{ى}\,\text{ع}^{\text{ن}-١}-(\text{ن}-١)\int \text{ع}^{\text{ن}-٢}\,\text{ى}\,\text{ءع}\ ,$$

$$\int \text{ع}^{\text{ن}-٢}\,\text{ى}\,\text{ءع}=\int \text{ع}^{\text{ن}-٢}\,\text{ءك}=\text{ك}\,\text{ع}^{\text{ن}-٢}-(\text{ن}-٢)\int \text{ع}^{\text{ن}-٣}\,\text{ك}\,\text{ءع}\ ,\ \ldots$$

وبناء على ذلك يكون

$$\int \text{ع}^{\text{ن}}\,\text{ح}\,\text{ءس}=\text{ط}\,\text{ع}^{\text{ن}}-\text{ن}\,\text{ى}\,\text{ع}^{\text{ن}-١}+\text{ن}(\text{ن}-١)\,\text{ك}\,\text{ع}^{\text{ن}-٢}-\ldots \qquad (\text{ا})$$

وكيفية تركيب هذا القانون واضحة ويشاهد أنه اذا كان ن عددا صحيحا موجبا وأمكن تحصيل التكاملات المرموز لها بالحروف ط و ى و ك و ... الخ فانه يتحصل التكامل المطلوب وهو $\int \text{ع}^{\text{ن}}\,\text{ح}\,\text{ءس}$

ب ٤٣ د (مثالان) الاول — ليكن المطلوب ايجاد

$$\int \text{س}^{\text{م}-١}\,(\text{لوس})^{\text{ن}}\,\text{ءس}$$

فهنا

$$\text{ح}=\text{س}^{\text{م}-١}\ ,\quad \text{ع}=\text{لوس}\ ,\quad \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}=\frac{١}{\text{س}}$$

وبناء على هذا يكون

$$\text{ط}=\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{م}}\ ,\quad \text{ى}=\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{م}^{٢}}\ ,\quad \text{ك}=\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{م}^{٣}}\ ,\ \ldots$$

واذا يكون

$$\int \text{س}^{\text{م}-١}(\text{لو})^{\text{ن}}\,\text{ءس}=\frac{\text{س}^{\text{م}}}{\text{م}}\left[(\text{لوس})^{\text{ن}}-\frac{\text{ن}}{\text{م}}(\text{لوس})^{\text{ن}-١}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)}{\text{م}^{٢}}(\text{لوس})^{\text{ن}-٢}-\ldots \pm\frac{\text{ن}(\text{ن}-١)\ldots ٣\times ٢\times ١}{\text{م}^{\text{ن}}}\right]+\text{ث}$$

واذا جعل لوس = ع فى هذا القانون يحدث

$$\int ع^{ن} هـ^{م ع} ء ع = \frac{هـ^{م ع}}{م} \left[ع^{ن} - \frac{ن}{م} ع^{ن-1} + \frac{ن(ن-1)}{م^2} ع^{ن-2} - \dots \right] + ث$$

الثانى — ليكن المطلوب حساب

$$\int (\text{قوس حاس})^{ن} ء س$$

فههنا يلزم جعل

$$ع = \text{قوس حاس} \quad و \quad ح = 1$$

فيكون

$$ط = \int ح ء س = س \quad ،$$

$$ى = \int \frac{س ء س}{\sqrt{1-س^2}} = -\sqrt{1-س^2} \quad ،$$

$$ك = \int -\sqrt{1-س^2} \frac{ء س}{\sqrt{1-س^2}} = -س \quad ،$$

$$ل = \int \frac{-س ء س}{\sqrt{1-س^2}} = \sqrt{1-س^2} \quad ،$$

$$م = \int ء س = س$$

وهلم جرا وبوضع هذه المقادير فى القانون (١) وأخذ كل من س و $\sqrt{1-س^2}$ مضروبا مشتركا يحدث

$$\int (\text{قوس حاس})^{ن} ء س$$

$$= س \left[ع^{ن} - ن(ن-1) ع^{ن-2} + ن(ن-1)(ن-2)(ن-3) ع^{ن-4} - \dots \right]$$

$$+ \sqrt{1-س^2} \left[ن ع^{ن-1} - ن(ن-1)(ن-2) ع^{ن-3} + \dots \right]$$

ومتى كان ن عددا صحيحا موجبا انتهى هاتان المتسلسلتان من نفسهما

واذا جعل قوس حاس = ع يحدث

$$\sqrt{1-س^2} = \text{حما}\, ع \quad ، \quad ء س = \text{حما}\, ع\, ء ع$$

ويؤل القانون المتقدم الى

$$\int ع^{ن}\, حاع\, ءع$$

$$= حاع \left[ع^{ن} - ن(ن-١)\, ع^{ن-٢} + ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)\, ع^{ن-٤} - \cdots \right]$$

$$+ حتاع \left[ن\, ع^{ن-١} - ن(ن-١)(ن-٢)\, ع^{ن-٣} + \cdots \right]$$

وغير ذلك فان هذا القانون ينتج من قانون آخر أعم لان

$$\int د(س)\, حتاس\, ءس = د(س)\, حاس - \int د'(س)\, حاس\, ءس \quad و$$

$$\int د'(س)\, حاس\, ءس = -د'(س)\, حتاس + \int د''(س)\, حتاس\, ءس \quad و$$

$$\int د''(س)\, حتاس\, ءس = د''(س)\, حاس - \int د'''(س)\, حاس\, ءس$$

وهلم جرا واذن يكون

$$\int د(س)\, حتاس\, ءس = \left[د(س) - د''(س) + د^{(٤)}(س) - \cdots \right] حاس$$

$$+ \left[د'(س) - د'''(س) + د^{(٥)}(س) - \cdots \right] حتاس$$

ويمكن دائما تحصيل التكامل اذا كانت د(س) دالة جبرية صحيحة

بند ٤٤ ـ متى كان ن عددا سالبا أو كسريا فان القانون (١) يشتمل على عدد غير منته من الحدود واذ ذاك يلزم استعمال التحايلات لايجاد التكامل

(مثالان) الاول ـ اذا أريد ايجاد

$$\int \frac{هـ^{ع}\, ءع}{ع^{ن}}$$

حينما يكون ن عددا صحيحا موجبا يؤخذ التكامل بالتجزئ فيحدث

$$\int \frac{هـ^{ع}\, ءع}{ع^{ن}} = -\frac{هـ^{ع}}{(ن-١)\, ع^{ن-١}} + \frac{١}{ن-١} \int \frac{هـ^{ع}\, ءع}{ع^{ن-١}}$$

وبواسطة هذا القانون يتعلق التكامل المطلوب بهذا

$$\int \frac{هـ^{ع}\, ءع}{ع}$$

الذى لم يمكن تحصيله الى الآن الا بواسطة متسلسلة ذات حدود عددها غير منته والقانون المذكور يستعمل بجعل $\text{ع} = \text{لو س}$ لايلولة $\int \frac{\text{د س}}{(\text{لو س})^{\text{ن}}}$ الى $\int \frac{\text{د س}}{\text{لو س}}$

الثانى – ايكن المطلوب حساب

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{س}\,\text{د س}}{(١+\text{س})^{٢}}$$

فلذلك يجعل

$$١+\text{س} = \text{ع} \quad \text{فيكون} \quad \text{س} = \text{ع} - ١$$

ويؤل التكامل المفروض الى

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{ع}-١}(\text{ع}-١)}{\text{ع}^{٢}}\,\text{د ع} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{ع}-١}}{\text{ع}}\,\text{د ع} - \int \frac{\text{هـ}^{\text{ع}-١}\,\text{د ع}}{\text{ع}^{٢}}$$

$$= \frac{١}{\text{هـ}}\left(\int \text{هـ}^{\text{ع}}\frac{\text{د ع}}{\text{ع}} - \int \text{هـ}^{\text{ع}}\frac{\text{د ع}}{\text{ع}^{٢}}\right)$$

وبأخذ التكامل بالتجزئ يحدث

$$\int \frac{١}{\text{ع}}\,\text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{د ع} = \int \frac{١}{\text{ع}}\,\text{د}\left(\text{هـ}^{\text{ع}}\right) = \frac{\text{هـ}^{\text{ع}}}{\text{ع}} - \int \text{هـ}^{\text{ع}}\,\text{د}\left(\frac{١}{\text{ع}}\right) = \frac{\text{هـ}^{\text{ع}}}{\text{ع}} + \int \text{هـ}^{\text{ع}}\frac{\text{د ع}}{\text{ع}^{٢}}$$

واذن يكون

$$\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{س}\,\text{د س}}{(١+\text{س})^{٢}} = \frac{١}{\text{هـ}} \cdot \frac{\text{هـ}^{\text{ع}}}{\text{ع}} = \frac{\text{هـ}^{\text{ع}-١}}{\text{ع}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{١+\text{س}}$$

فى حساب تكامل بعض دوال أسية ودائرية

بند ٤٥ – يمكن تعيين التكاملين $\int \text{هـ}^{\text{حس}}\,\text{حتا س}\,\text{د س}$ و $\int \text{هـ}^{\text{حس}}\,\text{حا س}\,\text{د س}$ بواسطة قاعدة أخذ التكامل بالتجزئ لانه حيث كان $\text{هـ}^{\text{حس}}\,\text{د س} = \text{د}\frac{\text{هـ}^{\text{حس}}}{\text{ح}}$ فيكون

$$\int \text{هـ}^{\text{حس}}\,\text{حتا س}\,\text{د س} = \frac{\text{هـ}^{\text{حس}}}{\text{ح}}\,\text{حتا س} + \frac{\text{ى}}{\text{ح}}\int \text{هـ}^{\text{حس}}\,\text{حا س}\,\text{د س} \quad \text{و} \quad (١)$$

$$\int \text{هـ}^{\text{حس}}\,\text{حا س}\,\text{د س} = \frac{\text{هـ}^{\text{حس}}}{\text{ح}}\,\text{حا س} - \frac{\text{ى}}{\text{ح}}\int \text{هـ}^{\text{حس}}\,\text{حتا س}\,\text{د س} \quad (٢)$$

ومن هاتين المعادلتين يستنتج

$$\int \text{هـ}^{\text{حـ سـ}}\ \text{حتا}\,\text{د}\,\text{سـ}\ \text{ءسـ} = \frac{\text{هـ}^{\text{حـ سـ}}\left(\text{حـ حتا د سـ} + \text{د حا د سـ}\right)}{\text{حـ}^{2} + \text{د}^{2}} + \text{ث} \quad \text{و}$$

$$\int \text{هـ}^{\text{حـ سـ}}\ \text{حا}\,\text{د}\,\text{سـ}\ \text{ءسـ} = \frac{\text{هـ}^{\text{حـ سـ}}\left(\text{حـ حا د سـ} - \text{د حتا د سـ}\right)}{\text{حـ}^{2} + \text{د}^{2}} + \text{ث}$$

بند ٤٦ يتحصل على التكامل

$$\int \text{د}\left(\text{حا سـ} \ \text{و} \ \text{حتا سـ}\right) \text{ءسـ}$$

الذى فيه د دالة جذرية بوضع

$$\text{طا} \tfrac{1}{2} \text{سـ} = \text{ع}$$

وحينئذ يكون

$$\text{حا سـ} = 2\ \text{حا} \tfrac{1}{2} \text{سـ}\ \text{حتا} \tfrac{1}{2} \text{سـ} = \frac{2\,\text{ع}}{1+\text{ع}^{2}} \quad \text{و}$$

$$\text{حتا سـ} = \text{حتا}^{2} \tfrac{1}{2} \text{سـ} - \text{حا}^{2} \tfrac{1}{2} \text{سـ} = \frac{1-\text{ع}^{2}}{1+\text{ع}^{2}} \quad \text{و}$$

$$\text{ءسـ} = \frac{2\,\text{ءع}}{1+\text{ع}^{2}}$$

واذا يكون

$$\text{د}\left(\text{حا سـ} \ \text{و} \ \text{حتا سـ}\right) \text{ءسـ} = \text{د}\left(\frac{2\,\text{ع}}{1+\text{ع}^{2}} \ \text{،} \ \frac{1-\text{ع}^{2}}{1+\text{ع}^{2}}\right) \frac{2\,\text{ءع}}{1+\text{ع}^{2}}$$

وهذه دالة جذرية بالنسبة للمتغير ع

بند ٤٧ وهاك بعض دوال دائرية توجد غالبا فى الحسابات وتكاملاتها تتحصل بسهولة

الاولى

$$\int \text{حا سـ حتا سـ ءسـ} = \int \text{حا سـ ء حا سـ} = \frac{\text{حا}^{2}\text{سـ}}{2} + \text{ث}$$

ويمكن أيضا كتابة

$$\int \text{حا سـ حتا سـ ءسـ} = \tfrac{1}{2} \int \text{حا } 2 \text{ سـ ءسـ} = \tfrac{1}{4} \int \text{حا } 2 \text{ سـ ء}(2 \text{ سـ})$$

واذا يكون

$$\text{ق حا س حتا س ءس} = -\tfrac{1}{4}\,\text{حتا ٢ س} + \text{ث}$$

ومن السهل التحقق من ان مقداری التكامل الواحد هذين لا يختلفان عن بعضهما الا بكمية ثابتة

الثانية

$$\text{ق طا س ءس} = -\,\text{ق}\,\frac{\text{ءحتا س}}{\text{حتا س}} = -\,\text{لوَ حتا س} + \text{ث}$$

او

$$\text{ق طا س ءس} = \text{لوَ}\,\frac{1}{\text{حتا س}} + \text{ث}$$

الثالثة

$$\text{ق طتا س ءس} = \text{ق}\,\frac{\text{ءحا س}}{\text{حا س}} = \text{لوَ حا س} + \text{ث}$$

الرابعة

$$\text{ق}\,\frac{\text{ءس}}{\text{حا س حتا س}} = \text{ق}\,\frac{\frac{\text{ءس}}{\text{حتا}^{2}\,\text{س}}}{\frac{\text{حا س}}{\text{حتا س}}} = \text{ق}\,\frac{\text{ءطا س}}{\text{طا س}} = \text{لوَ طا س} + \text{ث}$$

الخامسة

$$\text{ق}\,\frac{\text{ءس}}{\text{حا س}} = \text{ق}\,\frac{\text{ء}(\tfrac{1}{2}\,\text{س})}{\text{حا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{س حتا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{س}} = \text{لوَ طا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{س} + \text{ث}$$

السادسة

$$\text{ق}\,\frac{\text{ءس}}{\text{حتا س}} = -\,\text{لوَ طا}\left(\frac{\text{ط}}{4} - \tfrac{1}{2}\,\text{س}\right) + \text{ث}$$

وهذا التكامل يستنتج من السابق بتعويض س بالكمية $\frac{\text{ط}}{2} - \text{س}$

السابعة

$$\text{ق ءس}\,\sqrt{1 + \text{حتا س}} = 2\,\text{ق ء}(\tfrac{1}{2}\,\text{س})\,\sqrt{2}\,\text{حا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{س} = -2\sqrt{2}\,\text{حتا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{س} + \text{ث}$$

وبمثل ذلك يوجد أن

$$\text{ق ءس}\,\sqrt{1 - \text{حتا س}} = 2\sqrt{2}\,\text{حا}\,\tfrac{1}{2}\,\text{س} + \text{ث}$$

الثامنة

$$\int \frac{\text{ءس}}{\text{ح حا س} + \text{د حتا س}}$$

فهنا يمكن استعمال الطريقة العمومية (بند ٤٦) الا ان الاوفق كتابة

$$\int \frac{\text{ءس}}{\text{ح حا س} + \text{د حتا س}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2}} \int \frac{\text{ءس}}{\frac{\text{ح حا س}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2}} + \frac{\text{د حتا س}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2}}}$$

فاذا جعل

$$\frac{\text{ح}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2}} = \text{حتا ك} \quad \text{يكون} \quad \frac{\text{د}}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2}} = \text{حا ك}$$

ويكون

$$\int \frac{\text{ءس}}{\text{ح حا س} + \text{د حتا س}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2}} \int \frac{\text{ءس}}{\text{حا}(\text{س}+\text{ك})}$$

أو بملاحظة (الخامسة)

$$\int \frac{\text{ءس}}{\text{ح حا س} + \text{د حتا س}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2}} \text{ لوَ طا } \frac{\text{س}+\text{ك}}{2} + \text{ث}$$

التاسعة

$$\int \frac{\text{ءس}}{\text{ح حا س} + \text{د حتا س} + \text{و}}$$

في هذه الحالة يلزم استعمال الطريقة العمومية بأن يجعل $\text{طا} \frac{1}{2}\text{س} = \text{ع}$ فيتوصل الى أخذ تكامل هذا الكسر الجذري وهو

$$\frac{2\,\text{ءع}}{2\,\text{حع} + \text{د}(1-\text{ع}^2) + \text{و}(1+\text{ع}^2)}$$

وهذا التكامل هو اما

$$\frac{2}{\sqrt{\text{و}^2-\text{د}^2-\text{ح}^2}} \text{ قوس طا } \frac{(\text{و}-\text{ب}) \text{ طا } \frac{1}{2}\text{س} + \text{ح}}{\sqrt{\text{و}^2-\text{د}^2-\text{ح}^2}}$$

واما

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2-\text{و}^2}} \text{ لوَ } \frac{(\text{و}-\text{د}) \text{ طا } \frac{1}{2}\text{س} + \text{ح} - \sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2-\text{و}^2}}{(\text{و}-\text{د}) \text{ طا } \frac{1}{2}\text{س} + \text{ح} + \sqrt{\text{ح}^2+\text{د}^2-\text{و}^2}} + \text{ث}$$

في حساب تكامل التفاضلات التي بالصورة

$$حا^{م} س \; حتا^{ن} س \; ءس$$

بند ٤٨ اذا جعل $حا س = ع$ يكون

$$حتا س = (١ - ع^{٢})^{\frac{١}{٢}} \quad , \quad ءس = (١ - ع^{٢})^{-\frac{١}{٢}} ءع$$

ويكون

$$حا^{م} س \; حتا^{ن} س \; ءس = ع^{م} (١ - ع^{٢})^{\frac{ن-١}{٢}} ءع$$

ومن هنا يشاهد انه اذا كان ن عددا صحيحا فرديا موجبا كان أو سالبا يمكن أخذ التكامل مهما كان م وبمثل ذلك يشاهد انه اذا جعل $حتا س = ع$ تكون عملية أخذ التكامل ممكنة متى كان م عددا صحيحا فرديا موجبا أو سالبا

وفي جميع الاحوال يمكن مهما كان م و ن تحويل هذا التكامل الى تكاملات اخرى أبسط منه بواسطة أخذ التكامل بالتجزئ فان

$$\int حا^{م} س \; حتا^{ن} س \; ءس = \int حتا^{ن-١} س \; حا^{م} س \; حتا س \; ءس$$

$$= \int حتا^{ن-١} س \; ء \frac{حا^{م+١} س}{م+١}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\int حا^{م} س \; حتا^{ن} س \; ءس = حتا^{ن-١} س \frac{حا^{م+١} س}{م+١} + \frac{ن-١}{م+١} \int حا^{م+٢} س \; حتا^{ن-٢} س \; ءس \quad (١)$$

ويمكن استعمال هذا القانون متى كان م سالبا لانه اذ ذاك يكون $م + ٢$ ذا مقدار مطلق أقل من م غير انه يمكن تحصيل قانون يكون فيه الاس ن منقوصا بوحدتين ولذلك نلاحظ أن

$$حا^{م+٢} س \; حتا^{ن-٢} س = حا^{م} س \; (١ - حتا^{٢} س) \; حتا^{ن-٢} س$$

أو

$$حا^{م+٢} س \; حتا^{ن-٢} س = حا^{م} س \; حتا^{ن-٢} س - حا^{م} س \; حتا^{ن} س$$

واذن يكون

$$\int حا^{م+٢} س \; حتا^{ن-٢} س \; ءس = \int حا^{م} س \; حتا^{ن-٢} س \; ءس - \int حا^{م} س \; حتا^{ن} س \; ءس$$

وبوضع هذا المقدار فى الارتباط (ا) يحدث

$$\int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا}^{ن}\text{س}\,\text{ى س}$$
$$= \text{حتا}^{ن-1}\text{س}\,\frac{\text{حا}^{م+1}\text{س}}{م+1} + \frac{ن-1}{م+1}\left(\int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا}^{ن-2}\text{س}\,\text{ى س} - \int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا}^{ن}\text{س}\,\text{ى س}\right)$$

وبالاختصار يحدث

$$\text{(ب)}\quad \left\{\begin{array}{l}\int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا}^{ن}\text{س}\,\text{ى س} \\ = \frac{\text{حا}^{م+1}\text{س}\,\text{حتا}^{ن-1}\text{س}}{م+ن} + \frac{ن-1}{م+ن}\int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا}^{ن-2}\text{س}\,\text{ى س}\end{array}\right.$$

وعلى هذا ترجع عملية $\int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا}^{ن}\text{س}\,\text{ى س}$ الى العملية $\int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا}^{ن-2}\text{س}\,\text{ى س}$ وبمثل ذلك تؤول هذه العملية الاخيرة الى $\int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا}^{ن-4}\text{س}\,\text{ى س}$ وهلم جرا بحيث اذا كان ن عددا صحيحا موجبا يتوصل الى أحد التكاملين

$$\int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا س}\,\text{ى س} \quad \text{و} \quad \int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{ى س}$$

وذلك بحسب مايكون ن زوجيا أو فرديا فاما التكامل الاول فيتحصل عليه باستعمال قانون سنذكره قريبا ان شاء الله تعالى وأما التكامل الثانى فيتحصل عليه بغاية السهولة اذ أن

$$\int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{حتا س}\,\text{ى س} = \int \text{حا}^{م}\text{س}\,\text{ى حا س} = \frac{\text{حا}^{م+1}\text{س}}{م+1} + \text{ث}$$

يفسد القانون (ب) يكون ضالا متى كان م = − ن غير أنه فى هذه الحالة يوصل القانون (ا) الى

$$\int \text{طا}^{م}\text{س}\,\text{ى س} = \frac{\text{طا}^{م+1}\text{س}}{م+1} - \int \text{طا}^{م+2}\text{س}\,\text{ى س}$$

فاذا أبدل الآن م + ٢ بالعدد م أى أبدل م بالعدد م − ٢ وحل بالنسبة الى $\int \text{طا}^{م}\text{س}\,\text{ى س}$ يحدث

$$\int \text{طا}^{م}\text{س}\,\text{ى س} = \frac{\text{طا}^{م-1}\text{س}}{م-1} - \int \text{طا}^{م-2}\text{س}\,\text{ى س} \qquad \text{(ح)}$$

وبهذا القانون يختصر اس طا س ويتوصل بحسب مايكون م زوجيا أو فرديا الى

$$\int \text{ى س} = \text{س} + \text{ث} \quad \text{أو الى} \quad \int \text{طا س}\,\text{ى س} = -\,\text{لو حتا س} + \text{ث}$$

بند ٥٠ بالقانون (ب) يختصر اس حتاس لكن يمكن الحصول به على قانون آخر بواسطته يصغر اس حاس وذلك بأن يبدل س بالكمية $\frac{\text{ط}}{٢} - \text{س}$ و م بالعدد ن و ن بالعدد م فى قانون (ب) فيحدث

$$\left.\begin{aligned} &\text{ق}\,\text{حا}^{\text{م}}\text{س}\,\text{حتا}^{\text{ن}}\text{س}\,\text{ءس} \\ &= -\frac{\text{حا}^{\text{م}-١}\text{س}\,\text{حتا}^{\text{ن}+١}\text{س}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{\text{م}-١}{\text{م}+\text{ن}}\,\text{ق}\,\text{حا}^{\text{م}-٢}\text{س}\,\text{حتا}^{\text{ن}}\text{س}\,\text{ءس} \end{aligned}\right\} \quad (\text{د})$$

وبهذا القانون يصغر اس حاس متى كان م موجبا وقد شوهد انه اذا كان ن عددا صحيحا زوجيا يتحول التكامل المفروض بواسطة القانون (ب) الى التكامل $\text{ق}\,\text{حا}^{\text{م}}\text{س}\,\text{ءس}$ وهذا التكامل الاخير يتحول بواسطة القانون (د) الى $\text{ق}\,\text{حاس}\,\text{ءس} = -\text{حتاس} + \text{ث}$ متى كان م فرديا والى التكامل $\text{ق}\,\text{ءس} = \text{س} + \text{ث}$ متى كان م زوجيا وحينئذ متى كان م و ن عددين صحيحين موجبين يمكن دائما ايجاد التكامل

$$\text{ق}\,\text{حا}^{\text{م}}\text{س}\,\text{حتا}^{\text{ن}}\text{س}\,\text{ءس}$$

بند ٥١ القانونان اللذان تحصلنا عليهما لا يمكن استعمالهما فى الحالة التى يكون فيها أحد الاسين م و ن سالبا أو كان الاثنان سالبين لكن يمكن أن يستنتج منهما قانونان آخران بهما يمكن الاختصار فى هاتين الحالتين الاخيرتين

فلنفرض ان م سالبا وقد يكون ن موجبا أوسالبا فبابدال م بالعدد $-\text{م}+٢$ فى القانون (د) والحل بالنسبة للتكامل الموجود فى الطرف الثانى يحدث

$$\text{ق}\,\frac{\text{حتا}^{\text{ن}}\text{س}}{\text{حا}^{\text{م}}\text{س}} = -\frac{\text{حتا}^{\text{ن}+١}\text{س}}{(\text{م}-١)\,\text{حا}^{\text{م}-١}\text{س}} + \frac{\text{م}-\text{ن}-٢}{\text{م}-١}\,\text{ق}\,\frac{\text{حتا}^{\text{ن}}\text{س}}{\text{حا}^{\text{م}-٢}\text{س}}\,\text{ءس} \quad (\text{هـ})$$

وحينئذ يتحول من التكامل المفروض الى $\text{ق}\,\text{حتا}^{\text{ن}}\text{س}\,\text{ءس}$ أو الى $\text{ق}\,\frac{\text{حتا}^{\text{ن}}\text{س}}{\text{حاس}}\,\text{ءس}$ بحسب ما يكون م زوجيا أو فرديا

بند ٥٢ اذا جعل ن = ٠ فى القانون (د) حدث

$$\text{ق}\,\text{حا}^{\text{م}}\text{س}\,\text{ءس} = -\frac{\text{حا}^{\text{م}-١}\text{س}\,\text{حتاس}}{\text{م}} + \frac{\text{م}-١}{\text{م}}\,\text{ق}\,\text{حا}^{\text{م}-٢}\text{س}\,\text{ءس} \quad (\text{و})$$

وبناء على ذلك اذا كان م زوجيا يحدث

$$\int حا^{م} س \, ٤ س = -\frac{حتا س}{م}\left[حا^{م-١} س + \frac{م-١}{م-٢} حا^{م-٣} س + \frac{(م-١)(م-٣)}{(م-٢)(م-٤)} حا^{م-٥} س + \cdots + \frac{(م-١)(م-٣)\cdots ×٣×١}{(م-٢)(م-٤)\cdots ×٤×٢} حا س\right] + \frac{(م-١)(م-٣)\cdots ×٣×١}{(م-٢)(م-٤)\cdots ×٤×٢} × \frac{س}{م} + ث \quad (ز)$$

واذا كان م فرديا يحدث

$$\int حا^{م} س \, ٤ س = -\frac{حتا س}{م}\left[حا^{م-١} س + \frac{م-١}{م-٢} حا^{م-٣} س + \cdots + \frac{(م-١)(م-٣)\cdots ×٢}{(م-٢)(م-٤)\cdots ×١}\right] + ث \quad (ح)$$

وبهذه الكيفية يتحصل

$$\int حتا^{ن} س \, ٤ س$$

الفصل الخامس

فى التكاملات المحدودة

تعريفات واصطلاحات

بند ٥٣ متى كانت $ء_{١}(س)$ دالة للمتغير س تفاضلها $ء(س) ٤ س$ يكون

$$\int ء(س) ٤ س = ء_{١}(س) + ث$$

والدالة $ء_{١}(س) + ث$ تسمى التكامل الغير محدود للتفاضل $ء(س) ٤ س$ وعادة يتعين مقدار الثابت الغير معين ث بموجب شرط انعدام التكامل بمقدار مخصوص ا يعطى للمتغير س فبهذا الفرض يكون $ث = -ء_{١}(ا)$ ويكون

$$\int ء(س) ٤ س = ء_{١}(س) - ء_{١}(ا)$$

ويبقى أيضا فى هذا المقدار كمية س غير معينة لكن اذا اعطى مقدار مخصوص ب للمتغير س فان التكامل الذى يؤل الى ءِ(ب) — ءِ(ا) يكون معينا تعيينا تاما ويستدل عليه بالرمز $\int_{ا}^{ب}$ د(س) ءس ويسمى تكاملا محدودا مأخوذا بين النهايتين ا و ب أو من س = ا الى س = ب وحينئذ يكون

$$\int_{ا}^{ب} د(س)\, ءس = ءِ(ب) - ءِ(ا)$$

ويفهم من هنا انه يحصل على التكامل المحدود بجعل س = ا ثم س = ب فى التكامل الغير محدود وطرح الناتج الاول من الثانى

التفسير الهندسى للتكامل المحدود

بند ٥٤ ليكن حمد المنحنى الذى معادلته بالنسبة لمحورين متعامدين هى ص = د(س) فقد شوهد ان د(س) ءس هو تفاضل مساحة الجزء المحدود برأسى متغير وحينئذ يكون $\int$ د(س) ءس هو المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات ورأسيين حيثما اتفق لكن اذا كان الثابت الاختيارى معينا بموجب شرط كون ان التكامل أى المساحة يكون معدوما متى كان س = وا = ا وكان وع = س افق نقطة حيثما اتفق من المنحنى يكون مقدار التكامل بمقدار س هذا هو السطح احمع وبناء على ذلك اذا جعل فيه س = وب = ب يكون مقدار التكامل المبين كما ذكرنا بالرمز $\int_{ا}^{ب}$ د(س) ءس هو السطح حابد المحصور بين المنحنى والمحور وس والرأسيين الثابتين اح و بد

شكل ٢

أمثلة على التكاملات المحدودة

بند ٥٥ الاول $\int س^{ن}\, ءس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$

$\int_{0}^{1} س^{ن}\, ءس = \frac{1}{ن+1}$ اذا كان ن + ١ موجبا .

الثانى $\qquad \text{د}(\text{س}) = \dfrac{1}{3\text{س}^2 - 2\text{س} + 5}$

$$\int \text{د}(\text{س})\, \text{۶س} = \frac{1}{\sqrt{14}} \text{ قوس طا } \frac{3\text{س}-1}{\sqrt{14}} + \text{ث}$$

$$\int_1^2 \text{د}(\text{س})\, \text{۶س} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\text{قوس طا } \frac{5}{\sqrt{14}} - \text{قوس طا } \frac{2}{\sqrt{14}}\right) = \frac{1}{\sqrt{14}} \text{ قوس طا } \frac{\sqrt{14}}{8}$$

الثالث $\qquad \displaystyle\int \frac{\text{۶س}}{\text{ح}^2+\text{س}^2} = \frac{1}{\text{ح}} \text{ قوس طا } \frac{\text{س}}{\text{ح}} + \text{ث}$

$$\int_0^{\text{ح}} \frac{\text{۶س}}{\text{ح}^2+\text{س}^2} = \frac{1}{\text{ح}} \text{ قوس طا } 1 = \frac{\text{ط}}{4\text{ح}}$$

الرابع $\qquad \displaystyle\int \frac{\text{۶س}}{\text{س}} = \text{لو س} + \text{ث} \qquad \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \frac{\text{۶س}}{\text{س}} = \text{لو}\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)$

الخامس $\qquad \displaystyle\int \frac{\text{۶س}}{\sqrt{1-\text{س}^2}} = \text{قوس حا س} + \text{ث} \qquad \int_0^1 \frac{\text{۶س}}{\sqrt{1-\text{س}^2}} = \frac{\text{ط}}{2}$

السادس $\qquad \displaystyle\int_0^{\frac{\text{ط}}{2}} \text{حا}^{2\text{ن}} \text{س}\, \text{۶س} = \frac{1\times3\times5\cdots(2\text{ن}-1)}{2\times4\times6\cdots2\text{ن}} \frac{\text{ط}}{2}$

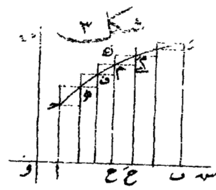
وهذا التكامل الاخير يستنتج من القانون (ز) المذكور فى (بند ٥٢) الذى جميع حدوده تنعدم بالنهايتين ماعدا الاخير

التكاملات المحدودة معتبرة نهايات حواصل جمع

بند ٥٦ قد فرض فيما تقدم أن د(س) محدودة ومستمرة من س = ا الى س = ب وفى هذه الحالة أقول أن التكامل المحدود $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{۶س}$ هو نهاية مجموع المقادير الصغيرة جدا للتفاضل د(س) ۶س متى تغير س بدرجات غير محسوسة من ا الى ب

ولاثبات ذلك نفرض لاجل ثبات الفكر أن ا < ب ونفرض أن د(س) متزايدة على الدوام من ابتدا د(ا) الى د(ب) ونعتبر المنحنى حمد الذى معادلته بالنسبة لمحورين متعامدين هى

$$\text{ص} = \text{د}(\text{س})$$



وليكن وا = ا و ون = ب و وح = س و
مح = ص و حح َ = ف س

فقد شوهد فى حساب التفاضل أن المساحة حـ ا ء ب تساوى نهاية مجموع مستطيلات لانهاية لعددها كالمستطيل م ح حَ ـ لكن م ح حَ ـ $= \text{د}(\text{س})\ \text{ف س}$

وحينئذ اذا رمزنا للمجموع كافة هذه المستطيلات بالرمز $\text{مجـ}[\text{د}(\text{س})\ \text{ف س}]$ يكون

$$\text{مساحة حـ ا ء ب} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{نها}\ \text{مجـ}[\text{د}(\text{س})\ \text{ف س}] = \text{مجـ}[\text{د}(\text{س})\, \text{ءس}]$$

وهو المطلوب اثباته

تنبيهات على التكاملات المحدودة

بند ٥٧ فى القانون

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{د}_{١}(\text{ب}) - \text{د}_{١}(\text{ا}) \qquad (١)$$

قد يكون ا أصغر من ب وقد يكون أكبر منه انما فى العادة يكون ا أصغر من ب فاذا لم يكن الامر كذلك فانه يمكن بسهولة رجوع هذه الحالة الى الحالة المتقدمة لانه بالقانون (١) يوجد أن

$$\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{د}_{١}(\text{ا}) - \text{د}_{١}(\text{ب}) \qquad (٢)$$

وحينئذ يكون

$$\int_{\text{ب}}^{\text{ا}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = - \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} \qquad (٣)$$

فعلى هذا يمكن تغيير وضعى نهايتى التكامل المحدود بشرط أن تغير اشارة الناتج

بند ٥٨ اذا كان حـ مقدارا للمتغير س محصورا بين ا و ب يكون

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{د}_{١}(\text{ب}) - \text{د}_{١}(\text{ا}) \quad \text{و} \quad \int_{\text{ا}}^{\text{حـ}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{د}_{١}(\text{حـ}) - \text{د}_{١}(\text{ا}) \quad \text{و}$$

$$\int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \text{د}_{١}(\text{ب}) - \text{د}_{١}(\text{حـ})$$

واذن يكون

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \int_{\text{ا}}^{\text{حـ}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} + \int_{\text{حـ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}$$

وبمثل ذلك يثبت أن

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}$$

$$= \int_{\text{ا}}^{\text{حـ}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} + \int_{\text{حـ}}^{\text{هـ}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} + \int_{\text{هـ}}^{\text{و}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} + \int_{\text{و}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس}$$

وقس على هذا

في الحساب التفريبي للتكامل المحدود

بند ٥٩ اذا لم تعلم كيفية أخذ تكامل دالة تفاضلية معلومة ولتكن د(س) ى س فانه يمكن في الغالب تحصيل نهايتين تحصران بينهما التكامل المحدود $\int_{ا}^{ب}$ د(س) ى س ولذلك نفرض أن د١(س) دالة للمتغير س بحيث يكون د١(س) < د(س) بجميع مقادير س المحصورة بين ا و ب فأقول أن

$$\int_{ا}^{ب} د_١(س) ى س < \int_{ا}^{ب} د(س) ى س$$

ولاثبات ذلك نفرض أن ح م د و ح َ م َ د َ المنحنيان اللذان معادلتاهما ص = د(س) و ص = د١(س) بالتناظر فحيث انه من س = وا = ا الى س = وب = ب يكون د(س) > د١(س) فيكون المنحنى ح َ م َ د َ موجود تحت المنحنى ح م د بين الرأسيين ح ا و ب د وبناء على ذلك يكون

مساحة ح ا ب د > مساحة ح َ ا ب د َ

أي

$$\int_{ا}^{ب} د_١(س) ى س < \int_{ا}^{ب} د(س) ى س \qquad (١)$$

وهو المطلوب اثباته

وكذا اذا كانت د٢(س) دالة للمتغير س بحيث يكون د٢(س) > د(س) من ابتداء س = ا الى س = ب يكون

$$\int_{ا}^{ب} د_٢(س) ى س > \int_{ا}^{ب} د(س) ى س \qquad (٢)$$

وبناء على ذلك اذا علمت كيفية أخذ تكامل د١(س) ى س و د٢(س) ى س توجد نهايتان تحصران بينهما $\int_{ا}^{ب}$ د(س) ى س

بند ٦٠ مثال $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}} \frac{ى س}{\sqrt{١ - س^٣}}$

فمادام س < ١ يكون

$$\frac{١}{\sqrt{١ - س^٢}} > \frac{١}{\sqrt{١ - س^٣}} > ١$$

واذن يكون

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{ءس}}{\sqrt{1-\text{س}^{2}}} > \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{ءس}}{\sqrt{1-\text{س}^{3}}} > \int_{0}^{\frac{1}{2}} \text{ءس}$$

لكن

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{ءس}}{\sqrt{1-\text{س}^{2}}} = \text{قوس حا}\ \tfrac{1}{2} = ٠{,}٥٢٣٦\ldots \quad \text{و} \quad \int_{0}^{\frac{1}{2}} \text{ءس} = ٠{,}٥$$

فاذن يكون

$$٠{,}٥ < \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\text{ءس}}{\sqrt{1-\text{س}^{3}}} < ٠{,}٥٢٣٦\ldots$$

في التكاملات المحدودة التي تصير فيها النهايات لانهائية

بند ٦١ قد فرضنا الى الآن ان النهايتين ا و ب في التكامل $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس}$ محدودتان وان الدالة د(س) محدودة ومستمرة بين هاتين النهايتين ولنبحث الآن عما يؤول اليه التكامل متى كانت احدى النهايتين ولتكن ب مثلا لانهائية وكانت الدالة د(س) محدودة ومستمرة فنقول انه في هذه الحالة يكون مقدار التكامل هو نهاية $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د(س) ءس}$ متى زاد ب الى مالانهاية وهذا المقدار قد يكون محدودا أو لانهائيا أو غير معين كما يشاهد في الامثلة الآتية وهي

بند ٦٢ الاول $\int_{0}^{\infty} \text{هـ}^{-\text{س}}\ \text{ءس}$

فهنا

$$\int \text{هـ}^{-\text{س}}\ \text{ءس} = -\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{ث}$$

وحينئذ يكون

$$\int_{0}^{\text{ب}} \text{هـ}^{-\text{س}}\ \text{ءس} = ١ - \frac{١}{\text{هـ}^{\text{ب}}}$$

وبجعل ب $= \infty$ يكون

$$\int_{0}^{\infty} \text{هـ}^{-\text{س}}\ \text{ءس} = ١$$

فاذا رسم المنحنى الذى معادلته ص $= \frac{1}{هـ^{س}}$ يحصل فرع لانهائى تقربى للمحور و س
ويكون التكامل المحدود دالا على المساحة المحصورة بين
هذا الفرع والرأسى و ا والمحور و س

شكل

ص

الثانى $\int_{0}^{\infty} هـ^{-س} ءس$

فى هذه الحالة

$\int_{0}^{ب} هـ^{-س} ءس = هـ^{-ب} - ١$ ، $\int_{0}^{\infty} هـ^{-س} ءس = \infty$

الثالث $\int_{0}^{\infty} \frac{ءس}{س^{2} + ح^{2}}$

فالتكامل الغير محدود هو

$\int \frac{ءس}{س^{2} + ح^{2}} = \frac{1}{ح}$ قوس طا $\frac{س}{ح} + ث$

واذن يكون $\int_{0}^{ب} \frac{ءس}{س^{2} + ح^{2}} = \frac{1}{ح}$ قوس طا $\frac{ب}{ح}$

وحينئذ يكون $\int_{0}^{\infty} \frac{ءس}{س^{2} + ح^{2}} = \frac{1}{ح}$ قوس طا $\infty = \frac{ط}{2ح}$

الرابع $\int_{1}^{\infty} \frac{ءس}{س}$

فهنا $\int_{1}^{ب} \frac{ءس}{س} = لو \frac{ب}{1}$ ، $\int_{1}^{\infty} \frac{ءس}{س} = \infty$

الخامس $\int_{0}^{\infty}$ حتا س ءس

هنا $\int_{0}^{ب}$ حتا س ءس = حا ب

لكن متى مال ب الى ما لانهاية لا يميل حا ب الى نهاية محدودة مطلقا وحينئذ يكون مقدار
التكامل $\int_{0}^{\infty}$ حتا س ءس غير معين

بند ٦٣ يمكن احيانا معرفة ان كان التكامل

$\int_{1}^{ب} د(س) ءس$

له مقدار محدود متى مال ب الى ∞ أم لا

فلنفرض أن ب كبير جدا غير أنه محدود فبالرمز بحرف ك لكمية محصورة بين ا و ب يكون

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{ا}}^{\text{ك}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$$

وحيث أن د(س) محدودة فيكون الجزء الاول من التكامل كمية محدودة ويكفي حينئذ أن يختبر هل الجزء الآخر $\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ محدودا أم لا ولذلك نوضع د(س) بهذه الصورة

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{د}_{\text{ا}}(\text{س})}{\text{س}^{\text{ن}}}$$

و $\text{د}_{\text{ا}}(\text{س})$ رمز لدالة محدودة بجميع مقادير س الاكبر من ك وليكن م أكبر المقادير التي تأخذها $\text{د}_{\text{ا}}(\text{س})$ بجميع مقادير س الاكبر من ك و مَ أصغرها فيكون

$$\frac{\text{مَ}}{\text{س}^{\text{ن}}} < \text{د}(\text{س}) < \frac{\text{م}}{\text{س}^{\text{ن}}}$$

وحينئذ يكون

$$\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} < \text{م}\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{\text{ن}}}$$

أو

$$\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} < \frac{\text{م}}{\text{ن}-1}\left(\frac{1}{\text{ك}^{\text{ن}-1}} - \frac{1}{\text{ب}^{\text{ن}-1}}\right)$$

فمتى كان $\text{ن} > 1$ يؤل الطرف الثاني من هذه المتباينة حينما يكون $\text{ب} = \infty$ الى $\frac{\text{م}}{\text{ن}-1}\,\frac{1}{\text{ك}^{\text{ن}-1}}$ وحينئذ يكون للتكامل $\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ في هذه الحالة مقدارا محدودا

واذا كان $\text{ن} < 1$ يكون

$$\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} > \text{مَ}\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{\text{ن}}}$$

أو

$$\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} > \frac{\text{مَ}}{1-\text{ن}}\left(\text{ب}^{1-\text{ن}} - \text{ك}^{1-\text{ن}}\right)$$

وحيث كان $1 - \text{ن}$ موجبا فيصير الطرف الثاني من هذه المتباينة لانهائيا حينما يكون $\text{ب} = \infty$

واذن يكون $\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ وبالتبعية له $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ لانهائيا حينما يكون $\text{ب} = \infty$.

واذا كان ن = ١ يكون

$$\int_{ل}^{ب} د(س)\,ءس > م \int_{ل}^{ب} \frac{ءس}{س} = م\, لو\left(\frac{ب}{ل}\right)$$

وحيث ان $لو\left(\frac{ب}{ل}\right) = \infty$ حينما يكون $ب = \infty$ فيكون

$$\int_{ل}^{\infty} د(س)\,ءس = \infty$$

في التكاملات التي تصير فيها الدالة الموضوعة تحت علامة $\int$ لانهائية

بين نهايتي التكامل أو بهاتين النهايتين

بند ٦٤ اذا صارت الدالة $د(س)$ لانهائية بالمقدار $س = ب$ يعين $\int_{ا}^{ب} د(س)\,ءس$ بالبحث عن نهاية التكامل $\int_{ا}^{ب-ف} د(س)\,ءس$ متى مالت الصغيرة ف الى الصفر

وكذا اذا كان $د(ا) = \infty$ يبحث عن نهاية $\int_{ا+ف}^{ب} د(س)\,ءس$ متى تناقص ف الى أن آل الى الصفر

واذا كان $د(ح)$ لانهائيا أو غير مستمر (وحرف ح رمز لكمية محصورة بين ا و ب) يلاحظ أن

$$\int_{ا}^{ب} د(س)\,ءس = نها \int_{ا}^{ح-ف} د(س)\,ءس + نها \int_{ح+ے}^{ب} د(س)\,ءس$$

وذلك حينما يتناقص ف و ے الى أن يؤولا الى الصفر

بند ٦٥ متى صارت الدالة $د(س)$ لانهائيـة باحدى النهايتين أو بمقدار محصور بينهما يمكن في الغالب معرفة ان كان مقدار التكامل محدودا أو لانهائيا فلنفرض مثلا ان $د(ب) = \infty$ ولتكن

$$د(س) = \frac{د_{١}(س)}{(ب - س)^{ن}}$$

وحرف ن رمز لعدد موجب و $د_{١}(س)$ دالة محدودة بالمقدار $س \leq ب$ ولنرمز بحرف ل لكمية محصورة بين ا و ب وقريبة من ب بقدر ما يراد فيكون

$$\int_{ا}^{ب} د(س)\,ءس = \int_{ا}^{ل} د(س)\,ءس + \int_{ل}^{ب} د(س)\,ءس$$

وحيث كان مقدار $\int_{\text{ا}}^{\text{ك}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ محدودا فيكفي معرفة هل $\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ محدود أم لا ولنرمز بحرفي م و مَ لثابتين اذا غير س من ك الى ب تكون د (س) محصورة بينهما فبمقادير س هذه اذا كان ن < ١ يكون

$$\text{د}(\text{س}) < \frac{\text{م}}{(\text{ب}-\text{س})^{\text{ن}}}$$

واذن يكون

$$\int_{\text{ك}}^{\text{ب}-\text{ف}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} < \int_{\text{ك}}^{\text{ب}-\text{ف}} \frac{\text{م}\, \text{ء}\text{س}}{(\text{ب}-\text{س})^{\text{ن}}} < \frac{\text{م}}{1-\text{ن}}\left[(\text{ب}-\text{ك})^{1-\text{ن}} - \text{ف}^{1-\text{ن}}\right]$$

ومتى مال ف الى الصفر يميل الطرف الثانى من هذه المتباينة الى المقدار المحدود $\frac{\text{م}}{1-\text{ن}}(\text{ب}-\text{ك})^{1-\text{ن}}$ واذن يكون مقدار نها $\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ وبالتبعية $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ محدودا

والآن أقول انه اذا كان ن > ١ يكون التكامل المفروض لانهائيا لان

$$\text{د}(\text{س}) > \frac{\text{مَ}}{(\text{ب}-\text{س})^{\text{ن}}}$$

واذن يكون

$$\int_{\text{ك}}^{\text{ب}-\text{ف}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} > \text{مَ}\int_{\text{ك}}^{\text{ب}-\text{ف}} \frac{\text{ء}\text{س}}{(\text{ب}-\text{س})^{\text{ن}}} > \frac{\text{مَ}}{\text{ن}-1}\left[\frac{1}{\text{ف}^{\text{ن}-1}} - \frac{1}{(\text{ب}-\text{ك})^{\text{ن}-1}}\right]$$

وحيث كان ن كمية > ١ فتى مال ف الى الصفر يصير الطرف الثانى لانهائيا وحينئذ بالاولوية يميل $\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ الى مالانهاية

ومثل هذا يحصل اذا كان ن = ١ لانه من المتباينة

$$\text{د}(\text{س}) > \frac{\text{مَ}}{\text{ب}-\text{س}}$$

يستنتج

$$\int_{\text{ك}}^{\text{ب}-\text{ف}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} > \text{مَ}\int_{\text{ك}}^{\text{ب}-\text{ف}} \frac{\text{ء}\text{س}}{\text{ب}-\text{س}} > \text{مَ}\ \text{لو}\ \frac{\text{ب}-\text{ك}}{\text{ف}}$$

والطرف الثانى يصير لانهائيا متى انعدم ف واذن يكون $\int_{\text{ك}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ وبالتبعية $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ لانهائيا

بند ٦٦ مثالان

الاول $\int_{أ}^{ب} \frac{ع\, ء س}{\sqrt{٢ ت^{٢} - ب س - س^{٢}}}$

(أ و ب كميتان موجبتان و ع دالة للمتغير س محدودة بجميع مقادير س المحصورة بين أ و ب) فيمكن كتابة

$$\frac{ع}{\sqrt{٢ ت^{٢} - ب س - س^{٢}}} = \frac{ع}{\sqrt{٢ ب + س}} \times \frac{١}{\sqrt{ب - س}} = \frac{أ(س)}{(ب - س)^{\frac{١}{٢}}}$$

وذلك بجعل

$$\frac{ع}{\sqrt{٢ ب + س}} = أ(س)$$

وحيث كان أس ب - س > ١ فينتج من القاعدة المتقدمة أن $\int_{أ}^{ب} \frac{ع\, ء س}{\sqrt{٢ ت^{٢} - ب س - س^{٢}}}$

يكون مقداره محدودا

الثانى $\int_{\cdot}^{١} \frac{ء س}{\sqrt{١ - س}}$

فهنا

$$\int \frac{ء س}{\sqrt{١ - س}} = - ٢ \sqrt{١ - س}$$

وحينئذ يكون

$$\int_{\cdot}^{١ - ف} \frac{ء س}{\sqrt{١ - س^{٢}}} = ٢ - ٢ \sqrt{ف}$$

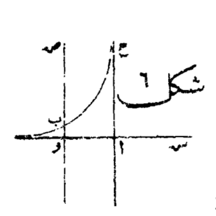
واذن يكون

$$\int_{\cdot}^{١} \frac{ء س}{\sqrt{١ - س^{٢}}} = ٢$$

ولاجل تفسير هذا الناتج نرسم المنحنى الذى معادلته $ص = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ فهذا المنحنى له

خطان تقريبان أحدهما محور السينات والآخر مواز ا ع لمحور الصادات ومتباعد عنه

بالبعد و ا = ١ وحينئذ يشاهد أن $\int^{ا} \frac{د س}{\sqrt{١ - س^٢}}$



يدل على المساحة المحصورة بين و ب ، و ا والمنحنى وخطه التقربى ا ع ويعلم من ذلك انه ولو أن هذه القطعة تمتد الى مالا نهاية الا أن مقدارها محدود

فى التكاملات الغير معينة

بند ٦٧ قد يصير التكامل المحدود غير معين وهذا هو الواقع فى التكامل

$$\int^{\infty} جتا س د س = حا \infty - حا ٠ .$$

لانه متى صار س لانهائيا لا يميل حا س الى نهاية محدودة مطلقا

وهاك مثالا آخر وهو

$$\int_{-ا}^{+ب} \frac{د س}{س}$$

(ا و ب كميتان موجبتان حيثما اتفق) فحيث ان $\frac{١}{س}$ يصير لانهائيا حينما يكون س = ٠ وهو مقدار محصور بين − ا و + ب فيلزم وضع

$$\int_{-ا}^{+ب} \frac{د س}{س} = نها \int_{-ا}^{-ف} \frac{د س}{س} + \int_{ك}^{+ب} \frac{د س}{س}$$

ثم تنقيص ف و ك الى أن يؤولا الى الصفر وحيث أن

$$\int_{-ا}^{-ف} \frac{د س}{س} = لو ف - لو ا \quad ، \quad \int_{ك}^{ب} \frac{د س}{س} = لو ب - لو ك$$

فيكون

$$\int_{-ا}^{-ف} \frac{د س}{س} + \int_{ك}^{ب} \frac{د س}{س} = لو ب - لو ا + لو ف - لو ك$$

$$= لو \left(\frac{ب}{ا}\right) + لو \left(\frac{ف}{ك}\right)$$

واذن يكون

$$\int_{-ا}^{+ب} \frac{د س}{س} = لو \left(\frac{ب}{ا}\right) + نها لو \left(\frac{ف}{ك}\right)$$

وحيث أنه ليس هنالك أدنى ارتباط بين الكميتين المتغيرتين ف و ك فلا تميل النسبة $\frac{ف}{ك}$ الى نهاية محدودة مطلقا وبناء على ذلك يكون التكامل غير معين

فى أخذ التكامل بواسطة المتسلسلات

بند ٦٨ اذا علمت دالة تفاضلية ولتكن $د(س)\,ى س$ وأمكن تحليل $د(س)$ الى متسلسلة تقاربية ولتكن

$$د(س) = ح_{١} + ح_{٢} + \cdots + ح_{ن} + ر_{ن} \qquad (١)$$

تحصل بالضرب فى $ى س$ وأخذ التكامل بين نهايتين ا و ب

$$\left.\begin{aligned} \int_{ا}^{ب} د(س)\,ى س &= \int_{ا}^{ب} ح_{١}\,ى س + \int_{ا}^{ب} ح_{٢}\,ى س + \cdots \\ &+ \int_{ا}^{ب} ح_{ن}\,ى س + \int_{ا}^{ب} ر_{ن}\,ى س \end{aligned}\right\} \qquad (٢)$$

فاذا كانت المتسلسلة (١) تقاربية بالمقدارين $س = ا$ و $س = ب$ وبجميع مقادير $س$ المحصورة بين ا و ب فانه يمكن فرض أن $ر_{ن} < ف$ (ف كمية صغيرة بقدر ما يراد) بشرط أن يكون كبيرا على قدر الكفاية واذاً يكون

$$\int_{ا}^{ب} ر_{ن}\,ى س < \int_{ا}^{ب} ف\,ى س \quad \text{أو} \quad \int_{ا}^{ب} ر_{ن}\,ى س < ف\,(ب - ا)$$

ويعلم من ذلك أن $\int_{ا}^{ب} ر_{ن}\,ى س$ يتناقص الى الصفر متى زاد ن الى ما لانهاية وينتج من ذلك ان المتسلسلة

$$\int_{ا}^{ب} ح_{١}\,ى س + \int_{ا}^{ب} ح_{٢}\,ى س + \cdots + \int_{ا}^{ب} ح_{ن}\,ى س + \cdots$$

تكون تقاربية ويكون مجموعها $\int_{ا}^{ب} د(س)\,ى س$ ويمكن تعويض المقدار الثابت ب بالكمية $س$ ويكون

$$\int_{ا}^{س} د(س)\,ى س = \int_{ا}^{س} ح_{١}\,ى س + \int_{ا}^{س} ح_{٢}\,ى س + \cdots \qquad (٣)$$

بند ٦٩ هذا القانون صحيح أيضا بالمقدار $س = ب$ حتى لو كانت المتسلسلة $ح_{١} + ح_{٢} + \cdots$ التقاربية متى كان $س$ أصغر من ب تصير تباعدية بالمقدار $س = ب$ بشرط أن تكون المتسلسلة (٢) تقاربية أيضا

لانه مهما كان صغر الكمية الموجبة ف يكون

$$\int_{ا}^{ب-ف} د(س)\,ى س = \int_{ا}^{ب-ف} ح_{١}\,ى س + \int_{ا}^{ب-ف} ح_{٢}\,ى س + \cdots$$

وحيث كان الطرفان دالتين مستمرتين للمتغير س ومتساويتين على الدوام فيجب أن تكون نهايتاهما حينما يكون ف = ٠ متساويتين واذن يكون

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ب}_{1}\,\text{ءس} + \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ب}_{2}\,\text{ءس} + \dots$$

بند ٧٠ وعلى العموم اذا أمكن تحليل د(س) بموجب قانون (مكلوران) الى متسلسلة تقاربية هكذا

$$\text{د}(\text{س}) = \text{د}(0) + \text{س}\,\text{دَ}(0) + \frac{\text{س}^{2}}{1\times 2}\,\text{دً}(0) + \frac{\text{س}^{3}}{1\times 2\times 3}\,\text{د}'''(0) + \dots$$

يكون

$$\int \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{ث} + \text{س}\,\text{د}(0) + \frac{\text{س}^{2}}{1\times 2}\,\text{دَ}(0) + \frac{\text{س}^{3}}{1\times 2\times 3}\,\text{دً}(0) + \dots$$

واذا اريد استنتاج التكامل المحدود $\int_{0}^{\text{س}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ أعني اذا اريد أن يبتدئ التكامل بالمقدار س = ٠ أي يكون معدوما حينما يكون س = ٠ يلزم أن يكون ث معدوما وفي هذه الحالة يكون

$$\int_{0}^{\text{س}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{س}\,\text{د}(0) + \frac{\text{س}^{2}}{1\times 2}\,\text{دَ}(0) + \frac{\text{س}^{3}}{1\times 2\times 3}\,\text{دً}(0) + \dots$$

أمثلة على أخذ التكامل بواسطة المتسلسلات

بند ٧١ الاول $\int \frac{\text{ءس}}{1+\text{س}} = \text{لوَ}(1+\text{س})$

فبعملية قسمة بسيطة يوجد أن

$$\frac{1}{1+\text{س}} = 1 - \text{س} + \text{س}^{2} - \text{س}^{3} + \dots \pm \text{س}^{\text{ن}-1} \mp \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{1+\text{س}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{لوَ}(1+\text{س}) = \text{س} - \frac{\text{س}^{2}}{2} + \frac{\text{س}^{3}}{3} - \frac{\text{س}^{4}}{4} + \dots \pm \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}} \mp \int_{0}^{\text{س}} \frac{\text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس}}{1+\text{س}}$$

ومتى كان المقدار المطلق للمتغير س < ١ تكون المتسلسلة $1 - \text{س} + \text{س}^{2} - \text{س}^{3} + \dots$ تقاربية وحينئذ تكون المتسلسلة $\text{س} - \frac{\text{س}^{2}}{2} + \frac{\text{س}^{3}}{3} - \frac{\text{س}^{4}}{4} + \dots$ تقاربية أيضا فيما بين نفس نهايتي س ويعلم من ذلك أنه متى كان $+1 > \text{س} > -1$ يكون

$$\text{لوَ}(1+\text{س}) = \text{س} - \frac{\text{س}^{2}}{2} + \frac{\text{س}^{3}}{3} - \frac{\text{س}^{4}}{4} + \dots$$

الثانی $\int_{\cdot}^{س} \frac{ء س}{١ + س^٢} =$ قوس طا س

فهنا

$$\frac{١}{١ + س^٢} = ١ - س^٢ + س^٤ - س^٦ + \ldots \pm س^{ن-١} \mp \frac{س^{ن+١}}{١ + س^٢}$$

وحرف ن رمز لعدد موجب فردی فاذا أخذ تكامل الطرفين وفرض ان قوس طا س أصغر الاقواس الموجبة التی ظلها س يوجد

$$\text{قوس طا س} = س - \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٥}{٥} - \frac{س^٧}{٧} + \ldots \pm \frac{س^ن}{ن} \mp \int_{\cdot} \frac{س^{ن+١} ء س}{١ + س^٢}$$

والمتسلسلة $١ - س^٢ + س^٤ - س^٦ + \ldots$ لاتكون تقاربية متی كان $س = ١$ غير ان المتسلسلة $س - \frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٥}{٥} - \ldots$ تكون تقاربية أيضا بالمقدار $س = ١$ واذن يكون

$$\text{قوس طا } ١ = \frac{ط}{٤} = ١ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \ldots$$

الثالث $\int_{\cdot}^{س} \frac{ء س}{\sqrt{١ - س^٢}} =$ قوس حا س

بقانون ذات الحدين يوجد

$$\frac{١}{\sqrt{١ - س^٢}} = ١ + \frac{١}{٢} س^٢ + \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٤} س^٤ + \frac{١ \times ٣ \times ٥}{٢ \times ٤ \times ٦} س^٦ + \ldots \quad (١)$$

وبضرب الطرف الثانی فی ء س وأخذ التكامل يحدث

$$\text{قوس حا س} = س + \frac{١}{٢} \frac{س^٣}{٣} + \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٤} \frac{س^٥}{٥} + \frac{١ \times ٣ \times ٥}{٢ \times ٤ \times ٦} \frac{س^٧}{٧} + \ldots \quad (٢)$$

وهذه متسلسلة تكون تقاربية متی كان $١ > س > -١$ اذ أن المتسلسلة (١) تقاربية بين هاتين النهايتين

والمتسلسلة (١) لاتكون تقاربية بالمقدار $س = ١$ غير ان حيث انه بالمقدار $س = ١ = \text{حا } \frac{ط}{٢}$ تكون المتسلسلة (٢) تقاربية أيضا وبموجب ما تقرر فی (ب ٦٩ د) يكون

$$\frac{ط}{٢} = ١ + \frac{١}{٢} \frac{١}{٣} + \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٤} \frac{١}{٥} + \frac{١ \times ٣ \times ٥}{٢ \times ٤ \times ٦} \frac{١}{٧} + \ldots$$

ويتحصل علی متسلسلة أسرع تقاربا بجعل $س = \frac{١}{٢} = \text{حا } \frac{ط}{٦}$ ويكون

$$\frac{ط}{٦} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} \frac{١}{٢^٣ \times ٣} + \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٤} \frac{١}{٢^٥ \times ٥} + \ldots$$

الباب الثانى

فى التطبيقات الهندسية لحساب التكامل

الفصل الاول

فى حساب المسائح المستوية

قوانين عموميه

بند ٧٢ ليكن ح م ء المنحنى الذى معادلته بالنسبة لمحورين متعامدين هى ص = ء(س)
ولنرمز بحرف ى للمساحة ا ح م ع وبحرفى س و ص لاحداثيى نقطة متغيرة م فيكون

شكل ٧

$$ى = ص ى س = ء(س) ى س$$

واذن يكون

$$ى = \int ء(س) ى س$$

فاذا أريد أن تكون المساحة محدودة بالرأسى ح ا المطابق للافقى و ا = ا وجب أن يبتدئ التكامل بالمقدار س = ا ويكون

$$ى = \int_{ا}^{س} ء(س) ى س$$

وحرف س رمز لافقى نقطة حيثما اتفق من المنحنى

ثم انه اذا احددت المساحة بالرأسى ب ء المطابق للافقى س = و ب = ب يكون

$$ى = \text{المساحة } ا ب ح ء = \int_{ا}^{ب} ء(س) ى س$$

واذا كان المحوران مائلين وفرض أن ى الزاوية الواقعة بينهما يكون

$$\text{مساحة } ا ب ح ء = حا و \int_{ا}^{ب} ء(س) ى س$$

أمثلة على حساب مسائح المنحنيات المنسوبة لاحداثيات مستقيمة

بند ٧٣ — لنفرض قطعا مكافئا حيثما اتفق $ص^{ن} = ع س^{م}$ (م و ن عددان موجبان) ونفرض أن وم ع = ى فيكون

$$ء ى = ص ء س = ع^{\frac{1}{ن}} س^{\frac{م}{ن}} ء س$$

ويكون

$$ى = \int_{0}^{س} ص ء س = \frac{ن}{م+ن} ع^{\frac{1}{ن}} س^{\frac{م+ن}{ن}}$$

وهذا الناتج يمكن وضعه هكذا

$$ى = \frac{ن}{م+ن} ع^{\frac{1}{ن}} س^{\frac{م}{ن}} س = \frac{ن}{م+ن} س ص$$

و س ص عبارة عن مساحة المستطيل و ع م ك المنشأ باحداثيي نقطة م وحينئذ يكون

$$و م ع : و ع م ك :: ن : (م+ن)$$

أو

$$و م ع : و م ك :: ن : م$$

ويفهم من هنا أن القطع المكافئ يقسم المستطيل و ع م ك بنسبة ن : م

بند ٧٤ — وبالعكس ليست هذه الخاصية الا للقطاعات المكافئة لانه يمكن كتابة التناسب المتقدم هكذا

$$ى : (س ص - ى) :: ن : م$$

واذن يكون

$$(م+ن) ى = ن س ص$$

وبناء على ذلك يجب ان يكون

$$(م+ن) ء ى = ن س ء ص + ن ص ء س$$

وحيث أن $ء ى = ص ء س$ فيكون

$$(م+ن) ص ء س = ن س ء ص + ن ص ء س$$

أو

$$م ص ء س = ن س ء ص$$

وهذا الناتج يمكن وضعه هكذا

$$\text{م}\,\frac{\text{ءس}}{\text{س}} = \text{ن}\,\frac{\text{ءص}}{\text{ص}}$$

وباخذ التكامل يحدث

$$\text{ن لوص} = \text{م لوس} + \text{ث} \quad \text{أو} \quad \text{لوص}^{\text{ن}} = \text{لوس}^{\text{م}} + \text{ث}$$

فاذا وضع ث بالصورة لو ح تكون المعادلة العمومية للمنحنيات التى لها الخاصية المذكورة هى

$$\text{لوص}^{\text{ن}} = \text{لوح} \times \text{س}^{\text{م}} \quad \text{أو} \quad \text{ص}^{\text{ن}} = \text{ح س}^{\text{م}}$$

وفى حالة القطع المكافئ الاعتيادى الذى معادلته $\text{ص}^{٢} = \text{ح س}$ يكون ن = ٢ و م = ١

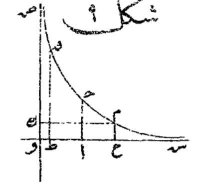
واذن يكون

$$\text{ى} = \frac{٢}{٣}\,\text{س ص}$$

بند ٧٥ ولنعتبر منحنيا من اصناف القطع الزائد معلوما بمعادلة وهى

$$\text{س}^{\text{م}}\,\text{ص}^{\text{ن}} = \text{ح}$$

م و ن عددان صحيحان موجبان



ولم يرسم بالشكل الا الفرع الموجود فى الزاوية ص و س الذى المحوران الاحداثيان خطان تقريبيان له ولنفرض أن ن > م ونفرض أن

$$\text{ى} = \text{ا ح م ع} \;,\; \text{و ا} = \text{ا} \;,\; \text{و ع} = \text{س}$$

فيكون

$$\text{ى} = \int_{\text{ا}}^{\text{س}} \text{ص ءس} = \int_{\text{ا}}^{\text{س}} \text{ح}^{\frac{١}{\text{ن}}}\,\text{س}^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}\,\text{ءس}$$

وبأخذ التكامل يحدث

$$\text{ى} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-\text{م}}\,\text{ح}^{\frac{١}{\text{ن}}}\left(\text{س}^{\frac{\text{ن}-\text{م}}{\text{ن}}} - \text{ا}^{\frac{\text{ن}-\text{م}}{\text{ن}}}\right)$$

فيشاهد انه اذا زاد س الى مالانهاية تزداد المساحة ا ح م ع الى مالانهاية كذلك واذا ترك م ع ثابتا ونقص ا الى الصفر يزداد السطح بالاستمرار لكن مع بقائه على الدوام محدودا وعند النهاية أى متى كان ا = ٠ تؤل هذه المساحة الى

$$\frac{ن}{ن-م} \quad ع^{\frac{1}{ن}} \quad س^{\frac{ن-م}{ن}}$$

وبناء على هذا يميل السطح ا ح ى ط الى نهاية محدودة كلما ازداد قرب نقطة ى من الخط التقربى وصه

وهذه النهاية التى تساوى $\frac{ن}{ن-م}$ $ع^{\frac{1}{ن}}$ س . $س^{-\frac{م}{ن}}$ أو للكمية $\frac{ن}{ن-م}$ س صه نسبتها الى مساحة المستطيل وم ع ك = س صه كنسبة ن الى ن — م أى ان

$$ى : س صه :: ن : ن - م$$

وذلك بالرمز بحرف ى للمساحة اللانهائية التى نهاية مقدارها محدودة

بند ٧٦ وبالعكس ليست هذه الخاصية الا للمنحنيات المحصورة فى المعادلة $س^م صه^ن = ع$ لانه من التناسب المتقدم يستنتج

$$ى (ن - م) = ن س صه$$

ومن هنا يكون

$$(ن - م) \, ۶ى = ن س ۶صه + ن صه ۶س$$

وحيث ان $۶ى = صه ۶س$ فبالاختصار والقسمة على س صه يحدث

$$-م \frac{۶س}{س} = ن \frac{۶صه}{صه}$$

وبأخذ التكامل يحدث

$$ن لو صه = ث - م لو س$$

وبجعل ث = لو ع يحدث

$$لو صه^ن = لو \frac{ع}{س^م}$$

ومن هنا يكون

$$س^م صه^ن = ع$$

وفى الحالة الخصوصية التى يكون فيها م = ن تؤل المعادلة

$$س^م صه^ن = ع$$

الى هذه

$$س صه = ع$$

التى تدل على قطع زائد قائم بدرجة ثانية و يكون

$$\text{ص} = \frac{\text{ح}}{\text{س}}$$

واذن يكون

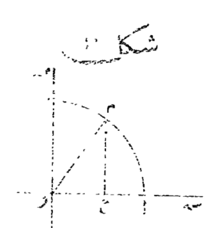
$$\text{ص ءس} = \text{ح} \frac{\text{ءس}}{\text{س}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{ن} = \text{ح لوس} + \text{ث} = \text{ح لو} \frac{\text{س}}{\text{ا}}$$

فاذا كان $\text{ح} = ١$, $\text{ا} = ١$ يكون

$$\text{ن} = \text{لوس}$$

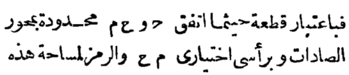


أعنى ان المساحة تكون مساوية للوغاريتم النيبريانى للافقى بـ ١٧ـد ولنعتبر الآن الدائرة التى معادلتها

$$\text{ص}^٢ + \text{س}^٢ = \text{ح}^٢$$

فمن هذه المعادلة يستخرج

$$\text{ص} = \sqrt{\text{ح}^٢ - \text{س}^٢}$$


فباعتبار قطعة حيثما اتفق ح و ح م محدودة بمحور الصادات و برأسى اختيارى م ح والرمز لمساحة هذه القطعة بحرف ن يكون

$$\text{ن} = \int^{\text{س}} \text{ءس} \sqrt{\text{ح}^٢ - \text{س}^٢} \qquad (١)$$

و بأخذ التكامل بالتجزئ يحدث

$$\int \text{ءس} \sqrt{\text{ح}^٢ - \text{س}^٢} = \text{س} \sqrt{\text{ح}^٢ - \text{س}^٢} + \int \frac{\text{س}^٢ \text{ءس}}{\sqrt{\text{ح}^٢ - \text{س}^٢}} \qquad (٢)$$

لكن

$$\int \frac{\text{س}^٢ \text{ءس}}{\sqrt{\text{ح}^٢ - \text{س}^٢}} = \int \frac{(\text{س}^٢ - \text{ح}^٢ + \text{ح}^٢)\, \text{ءس}}{\sqrt{\text{ح}^٢ - \text{س}^٢}}$$

$$= \text{ح}^٢ \int \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{ح}^٢ - \text{س}^٢}} - \int \text{ءس} \sqrt{\text{ح}^٢ - \text{س}^٢}$$

و بوضع هذا المقدار فى معادلة (٢) والتحويل والقسمة على ٢ يحدث

$$\int \sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}\ \text{ء س} = \frac{\text{س}\sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}}{٢} + \frac{\text{ح}^2}{٢}\int \frac{\text{ء س}}{\sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}}$$

لكن

$$\int \frac{\text{ء س}}{\sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}} = \text{قوس حا}\ \frac{\text{س}}{\text{ا}} + \text{ث}$$

فاذن يكون

$$\text{ى} = \int_{\cdot}^{\text{س}} \sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}\ \text{ء س} = \frac{\text{س}\sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}}{٢} + \frac{\text{ح}^2}{٢}\ \text{قوس حا}\ \frac{\text{س}}{\text{ا}}$$

بند ١٨ ولنعتبر القطع الناقص الذى معادلته

$$\text{ح}^2\text{ص}^2 + \text{ب}^2\text{س}^2 = \text{ح}^2\text{ب}^2$$

شكل ١١

ونفرض ان ى مساحة الجزء و ع م ب المحدود بمحور الصادات وبرأسى حيثما اتفق م ع فمن معادلة القطع الناقص يستخرج

$$\text{ص} = \frac{\text{ب}}{\text{ح}}\sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}$$

وحينئذ يكون

$$\text{ى} = \frac{\text{ب}}{\text{ح}}\int_{\cdot}^{\text{س}} \sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}\ \text{ء س}$$

فاذا رسمنا على المحور ٢ ح بجعله قطرا نصف محيط دائرة وفرضنا ان ىَ مساحة الجزء ح و ع ى يكون

$$\text{ىَ} = \int_{\cdot}^{\text{س}} \sqrt{\text{ح}^2-\text{س}^2}\ \text{ء س}$$

ومن هنا يستنتج ان

$$\frac{\text{ى}}{\text{ىَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ح}}$$

فعلى هذا تكون النسبة بين جزء القطع الناقص وجزء الدائرة المتحدين فى الافقى كنسبة ب الى ح ويستنتج من ذلك انه اذا رمز بحرف ع للسطح الكامل للقطع الناقص و بحرف عَ لسطح الدائرة يكون

$$\text{ع} : \text{عَ} :: \text{ب} : \text{ح}$$

ومن هذا التناسب وملاحظة ان عَ = ط ح² يستخرج

$$\text{ع} = \frac{\text{ب}}{\text{ح}} \times \text{ط}\,\text{ح}^2 = \text{ط}\,\text{ح}\,\text{ب}$$

و يعلم من ذلك ان سطح القطع الناقص وسط متناسب بين سطحى الدائرتين اللتين قطراهما محورا القطع الناقص

شكل ١٢

بند ١٩ واذا اعتبر القطع الزائد الذى معادلته

$$ص = \frac{ب}{ح}\sqrt{س^2 - ح^2}$$

تكون مساحة الجزء ا م ع معلومة بهذا القانون

$$ن = \frac{ب}{ح}\int_{ح}^{س}\sqrt{س^2 - ح^2}\; ءس$$

وبأخذ التكامل بالتجزئ يحدث

$$\int\sqrt{س^2 - ح^2}\; ءس = س\sqrt{س^2 - ح^2} - \int\frac{س^2\; ءس}{\sqrt{س^2 - ح^2}}$$

لكن

$$\int\frac{س^2\; ءس}{\sqrt{س^2 - ح^2}} = \int\frac{(س^2 - ح^2 + ح^2)\; ءس}{\sqrt{س^2 - ح^2}}$$

$$= \int ءس\sqrt{س^2 - ح^2} + ح^2\int\frac{ءس}{\sqrt{س^2 - ح^2}}$$

ومعلوم أن

$$\int\frac{ءس}{\sqrt{س^2 - ح^2}} = لو\left(س + \sqrt{س^2 - ح^2}\right) + ث$$

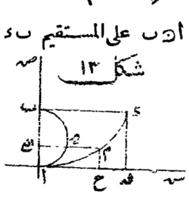
وحينئذ يكون

$$\int ءس\sqrt{س^2 - ح^2} = \frac{س\sqrt{س^2 - ح^2}}{2} - \frac{ح^2}{2}لو\left(س + \sqrt{س^2 - ح^2}\right) + ث$$

واذن يكون

$$ا م ع = \frac{ب س\sqrt{س^2 - ح^2}}{2ح} - \frac{ح ب}{2}لو\left(\frac{س + \sqrt{س^2 - ح^2}}{ح}\right)$$

بند ٢٠ ولنعتبر السيكلويد ا م ى الحادث من حركة الدائرة ا ه ب على المستقيم ب ى ونجعل الرأس ا اصلا للاحداثيات ونجعل المماس للمنحنى والعمودى عليه فى هذه النقطة محورى الاحداثيات فتكون المعادلة التفاضلية للمنحنى هى



$$ءس = ءص\sqrt{\frac{2ح - ص}{ص}}$$

واذن يكون

$$\text{مساحة ا م ع} = \int^{\text{ص}} \text{س}\, \text{ء ص} = \int^{\text{ص}} \text{ء ص} \sqrt{\text{٢ ح ص} - \text{ص}^{٢}}$$

ولنمد م ك عموداعلى ا ب فيحدد فى الدائرة ا ى ب جزء ا ك ى وبملاحظة أن

$$\text{ك ى} = \sqrt{\text{٢ ح ص} - \text{ص}^{٢}}$$

يحدث

$$\text{جزء ا ك ى} = \int^{\text{ص}} \text{ء ص} \sqrt{\text{٢ ح ص} - \text{ص}^{٢}}$$

واذن يكون

$$\text{ا م ع} = \text{جزء ا ى ك}$$

فاذا جعل $\text{س} = \text{ط ح}$ يكون $\text{ص} = \text{٢ ح}$ ويكون

$$\text{ا د ن} = \frac{\text{ط ح}^{٢}}{٢}$$

وبطرح هذه المساحة من المساحة $\text{٢ ط ح}^{٢}$ أى مساحة المستطيل ا ب د ن وتضعيف الناتج يكون

$$\text{٢ مساحة ا م د ب} = \text{٣ ط ح}^{٢}$$

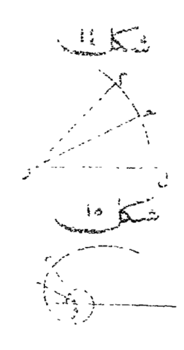
أعنى ان المساحة المحصورة بين السيكلويد وقاعدته تساوى ثلاثة أمثال مساحة الدائرة الراسمة

فى حساب مساحة المنحنيات المنسوبة لاحداثيات قطبية

بند اذا رمز بحرف ن لمساحة القطاع ح و م يكون

$$\text{ء ن} = \tfrac{١}{٢}\, \text{ى}^{٢}\, \text{ء و}$$

وحرفا ى ، و رمزان للاحداثيين القطبيين لنقطة م



بند ٨ لنعتبر الحلزون اللوغاريتمى الذى معادلته هى

$$\text{ى} = \text{ح ه}^{\text{م و}}$$

فيكون

$$\text{ن} = \frac{\text{ح}^{٢}}{٢} \int \text{ه}^{\text{٢م و}}\, \text{ء و} = \frac{\text{ح}^{٢}}{\text{٤م}}\, \text{ه}^{\text{٢م و}} + \text{ث} = \frac{\text{ى}^{٢}}{\text{٤م}} + \text{ث}$$

فاذا جعلنا $\text{و ح} = \text{ى}'$ وجعلنا $\text{ى} = \text{ى}'$ فى القانون

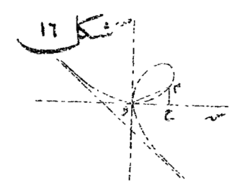
يحدث

$$. = \frac{\text{ى}'^{٢}}{\text{٤م}} + \text{ث}$$

واذن يكون

$$ن = \frac{1}{٤م} (ق^{٢} - ق^{-٢})$$

ب٨٣ـ قد يسهل أحيانا حساب المساحة باستعمال الاحداثيات القطبية مثلا لنفرض المنحنى الذى معادلته



$$س^{٣} + ص^{٣} - ح س ص = ٠ \qquad (١)$$

وهذا المنحنى المعروف بورقة ديكارت يتركب من فرعين لانهائيين يتقابلان مع بعضهما فى نقطة الاصل ولهما خط تقربى هو المستقيم الذى معادلته

$$س + ص + \frac{ح}{٣} = ٠$$

فبالاحداثيات الاصلية تستوجب المسئلة التى نحن بصددها حل معادلته بدرجة ثالثة لكن اذا أخذت المعادلة القطبية للمنحنى بوضع القطب فى نقطة و لايكون هنالك الامقدارا واحدا لنصف القطر القطبى فى اتجاه معلوم لانه حيث كانت نقطة الاصل نقطة مزدوجة فيجب أن تحقق المعادلة بمقدارين معدومين لنصف القطر القطبى ق وبناء على ذلك يكون الطرف الاول قابلا للقسمة على $ق^{٢}$

فاذا جعل و س محورا قطبيا لزم تعويض س فى المعادلة (١) بالكمية ق حتا و و ص بالمقدار ق حا و وبذلك يحدث

$$ق^{٣}(حتا^{٣} و + حا^{٣} و) - ح ق^{٢} حا و حتا و = ٠$$

وبحذف العامل $ق^{٢}$ والحل بالنسبة للمتغير ق يحدث

$$ق = \frac{ح حا و حتا و}{حا^{٣} و + حتا^{٣} و} \qquad (١)$$

وغير ذلك اذا رمز بحرف ن لمساحة الجزء و ا م يكون

$$ن = \frac{1}{٢} \int ق^{٢} ء و$$

وحينئذ اذا أبدل ق بمقداره يحدث

$$ن = \frac{1}{٢} \int \frac{ح^{٢} حا^{٢} و حتا^{٢} و}{(حتا^{٣} و + حا^{٣} و)^{٢}} ء و \quad أو \quad ن = \frac{ح^{٢}}{٢} \int \frac{طا^{٢} و \frac{ء و}{حتا^{٢} و}}{(١ + طا^{٣} و)^{٢}}$$

ولايجاد هذا التكامل نضع

$$\text{١} + \text{طا}^{\text{٣}}\,\text{و} = \text{ع} \quad \text{فيكون} \quad \text{ءع} = \text{٣}\ \text{طا}^{\text{٢}}\,\text{و}\ \frac{\text{ءو}}{\text{حتا}^{\text{٢}}\,\text{و}}$$

واذن يكون

$$\int \frac{\text{طا}^{\text{٢}}\,\text{و}\ \frac{\text{ءو}}{\text{حتا}^{\text{٢}}\,\text{و}}}{(\text{١} + \text{طا}^{\text{٣}}\,\text{و})^{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٣}} \int \frac{\text{ءع}}{\text{ع}^{\text{٢}}} = -\frac{\text{١}}{\text{٣ ع}} + \text{ث} = -\frac{\text{١}}{\text{٣}(\text{١} + \text{طا}^{\text{٣}}\,\text{و})} + \text{ث}$$

وبوضع هذا المقدار في مقدار ن يحدث

$$\text{ن} = -\frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{٦}} \cdot \frac{\text{١}}{\text{١} + \text{طا}^{\text{٣}}\,\text{و}} + \text{ث}$$

وحيث ان المساحة تنعدم حينما يكون $\text{و} = \text{٠}$ فيكون $\text{ث} = \frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{٦}}$ واذن يكون

$$\text{ن} = \frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{٦}} \frac{\text{طا}^{\text{٣}}\,\text{و}}{\text{١} + \text{طا}^{\text{٣}}\,\text{و}}$$

وتحصل مساحة الورقة بتمامها بجعل $\text{و} = \frac{\text{ط}}{\text{٢}}$ في مقدار ن الذي يؤل حينئذ الى $\frac{\text{ح}^{\text{٢}}}{\text{٦}}$ اذ ان الكسر $\frac{\text{طا}^{\text{٣}}\,\text{و}}{\text{١} + \text{طا}^{\text{٣}}\,\text{و}}$ الذي يمكن كتابته هكذا $\frac{\text{١}}{\text{١} + \text{طتا}^{\text{٣}}\,\text{و}}$ يصير مساويا للواحد متى كان $\text{و} = \frac{\text{ط}}{\text{٢}}$

الفصل الثاني

في حساب أطوال المنحنيات المستوية

قانون عام

٨٤ - اذا رمزنا بحرف م لقوس محصور بين نقطة ثابتة على منحن ونقطة على هذا المنحنى احداثياها العموديان س و ص يكون

$$\text{ءم} = \sqrt{\text{ءس}^{\text{٢}} + \text{ءص}^{\text{٢}}}$$

وحينئذ يكفى لايجاد طول القوس أخذ تكامل $\sqrt{ءس^2 + ءص^2}$ بين النهايتين المعلومتين بعد تعويض س أو ص بمقداره المستخرج من معادلة المنحنى مثلا اذا كان ص دالة للمتغير س يؤخذ

$$ل = \int ءس \sqrt{1 + \frac{ءص^2}{ءس^2}}$$

فى حساب طول قوس من قطع مكافئ

بند ٨٥ لنفرض أن المطلوب ايجاد طول قوس من القطع المكافئ الذى معادلاته

$$ص^2 = ٢ ح س$$

فلذلك يلزم تعويض ءس فى القانون

$$ءل = \sqrt{ءس^2 + ءص^2}$$

الذى نفرض فيه س دالة للمتغير ص بمقداره المستخرج من المعادلة التفاضلية $ص ءص = ح ءس$ وبذلك يحدث

$$ءل = \sqrt{\frac{ص^2 ءص^2}{ح^2} + ءص^2} = \frac{ءص}{ح} \sqrt{ص^2 + ح^2}$$

وحينئذ اذا وجب أن يبتدئ القوس برأس المنحنى يكون

$$ل = \frac{1}{ح} \int_0^{ص} ءص \sqrt{ص^2 + ح^2}$$

وبأخذ التكامل بالتجزئ يحدث

$$\int ءص \sqrt{ص^2 + ح^2} = ص \sqrt{ص^2 + ح^2} - \int \frac{ص^2 ءص}{\sqrt{ص^2 + ح^2}}$$

لكن

$$\int \frac{ص^2 ءص}{\sqrt{ص^2 + ح^2}} = \int ءص \sqrt{ص^2 + ح^2} - ح^2 \int \frac{ءص}{\sqrt{ص^2 + ح^2}}$$

وبالوضع والتحويل يحدث

$$٢ \int ءص \sqrt{ص^2 + ح^2} = ص \sqrt{ص^2 + ح^2} + ح^2 \int \frac{ءص}{\sqrt{ص^2 + ح^2}}$$

ولكن

$$\int \frac{\text{ء}\text{ص}}{\sqrt{\text{ص}^2+\text{ع}^2}} = \text{لوَ}\left[\text{ص}+\sqrt{\text{ص}^2+\text{ع}^2}\right]+\text{ث}$$

فاذن يكون

$$\frac{1}{\text{ع}}\int \text{ء}\text{ص}\sqrt{\text{ص}^2+\text{ع}^2} = \frac{\text{ص}\sqrt{\text{ص}^2+\text{ع}^2}}{2\,\text{ع}} + \frac{\text{ع}}{2}\,\text{لوَ}\left(\text{ص}+\sqrt{\text{ص}^2+\text{ع}^2}\right)+\text{ث}$$

وحيث يجب ان ينعدم التكامل بالمقدار ص = ٠ فيكون

$$0 = \frac{\text{ع}}{2}\,\text{لوَ}\,\text{ع} + \text{ث} \quad \text{ومن هنا يكون} \quad \text{ث} = -\frac{\text{ع}}{2}\,\text{لوَ}\,\text{ع}$$

وبوضع هذا المقدار فى القانون يحدث

$$\text{ر} = \frac{\text{ص}\sqrt{\text{ص}^2+\text{ع}^2}}{2\,\text{ع}} + \frac{\text{ع}}{2}\,\text{لوَ}\left(\frac{\text{ص}+\sqrt{\text{ص}^2+\text{ع}^2}}{\text{ع}}\right)$$

فى طول قوس من قطع ناقص

بند ٨٦ لنعتبر القوس ب م من القطع الناقص محسوبا بالابتداء من الرأس ب فمن معادلة المنحنى وهى

شكل ١٧

$$\text{ح}^2\text{ص}^2 + \text{ب}^2\text{س}^2 = \text{ح}^2\text{ب}^2$$

يستخرج

$$\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}} = -\frac{\text{ب}^2\text{س}}{\text{ح}^2\text{ص}}$$

وحينئذ يكون

$$\text{ء}\text{ر} = \text{ء}\text{س}\sqrt{1+\frac{\text{ب}^4\text{س}^2}{\text{ح}^4\text{ص}^2}} = \text{ء}\text{س}\sqrt{1+\frac{\text{ب}^4\text{س}^2}{\text{ح}^2(\text{ح}^2\text{ب}^2-\text{ب}^2\text{س}^2)}}$$

أو

$$\text{ء}\text{ر} = \text{ء}\text{س}\sqrt{\frac{\text{ح}^4-(\text{ح}^2-\text{ب}^2)\,\text{س}^2}{\text{ح}^2(\text{ح}^2-\text{س}^2)}}$$

وللاختصار نضع $\sqrt{\text{ح}^2-\text{ب}^2} = \text{ح}\,\text{ف}$ وحرف ف رمز للاختلاف المركزى أعنى النسبة بين البعد البورى والمحور الاكبر فيحدث

$$\text{ء}\text{ر} = \text{ء}\text{س}\sqrt{\frac{\text{ح}^2-\text{ف}^2\text{س}^2}{\text{ح}^2-\text{س}^2}}$$

وحيث ان س يتغير من ٠ الى ح فتحصل جميع مقادير س بجعل

$$\text{س} = \text{ح حا و}$$

وتغير و من ٠ الى $\frac{\text{ط}}{٢}$ وحينئذ يكون

$$\text{ء ر} = \text{ح ء و جتا و}\sqrt{\frac{١ - \text{ق}^٢ \text{حا}^٢ \text{و}}{\text{جتا}^٢ \text{و}}} = \text{ح ء و}\sqrt{١ - \text{ق}^٢ \text{حا}^٢ \text{و}}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\text{ر} = \text{قوس ب م} = \text{ح} \int_{}^{\text{و}} \text{ء و}\sqrt{١ - \text{ق}^٢ \text{حا}^٢ \text{و}}$$

بند ٨٧ التكامل $\int \text{ء و}\sqrt{١ - \text{ق}^٢ \text{حا}^٢ \text{و}}$ دالة عالية لا يمكن تحصيل تكاملها الا بتحليلها الى متسلسلة فباستعمال قانون ذات الحدين يحدث

$$(١ - \text{ق}^٢ \text{حا}^٢ \text{و})^{\frac{١}{٢}} = ١ - \frac{١}{٢}\text{ق}^٢ \text{حا}^٢ \text{و} - \frac{١}{٢}\,\frac{١}{٤}\,\text{ق}^٤ \text{حا}^٤ \text{و}$$
$$- \frac{١\times١\times٣}{٢\times٤\times٦}\text{ق}^٦ \text{حا}^٦ \text{و} - \frac{١\times١\times٣\times٥}{٢\times٤\times٦\times٨}\text{ق}^٨ \text{حا}^٨ \text{و} - \ldots$$

وحينئذ يكون طول القوس ب م هو

$$\text{ر} = \text{ح}\left[\begin{array}{l}\text{و} - \frac{١}{٢}\text{ق}^٢\int \text{ء و حا}^٢ \text{و} - \frac{١}{٢}\,\frac{١}{٤}\,\text{ق}^٤ \int \text{ء و حا}^٤ \text{و} \\ - \frac{١\times١\times٣}{٢\times٤\times٦}\text{ق}^٦ \int \text{ء و حا}^٦ \text{و} - \ldots\end{array}\right] \qquad (١)$$

ويحصل على تكاملات الطرف الثاني بهذا القانون

$$\int \text{حا}^{\text{م}} \text{و ء و} = - \frac{\text{جتا و}}{\text{م}}\Bigg[\text{حا}^{\text{م}-١}\text{و} + \frac{\text{م}-١}{\text{م}-٢}\text{حا}^{\text{م}-٣}\text{و}$$
$$+ \frac{(\text{م}-١)(\text{م}-٣)}{(\text{م}-٢)(\text{م}-٤)}\text{حا}^{\text{م}-٥}\text{و} + \ldots + \frac{(\text{م}-١)(\text{م}-٣)(\text{م}-٥)\cdots٥\times٣\times١}{(\text{م}-٢)(\text{م}-٤)(\text{م}-٦)\cdots٤\times٢}\text{حا و}\Bigg]$$
$$+ \frac{(\text{م}-١)(\text{م}-٣)\cdots٥\times٣\times١}{(\text{م}-٢)(\text{م}-٤)\cdots٤\times٢}\,\frac{\text{و}}{\text{م}} \qquad (٢)$$

وليس هنالك ثابت اختياري لان هذا التكامل يجب ان يبتدئ بالصفر

بند ٨٨ — اذا أريد ايجاد ربع القطع الناقص لزم جعل $و = \frac{ط}{٢}$ في جميع التكاملات وباجراء هذا الوضع في قانون (٢) يحدث

$$\int_{0}^{\frac{ط}{٢}} جا^{م} و\, ءو = \frac{١ \times ٣ \times ٥ \cdots (م-٣)(م-١)}{٢ \times ٤ \times ٦ \cdots \times م} \cdot \frac{ط}{٢} \qquad (٣)$$

وحينئذ يكون

$$\int_{0}^{\frac{ط}{٢}} \sqrt{١ - ف^{٢} جا^{٢} و}\, ءو = \frac{ط}{٢} - \frac{١}{٢} ف^{٢} \frac{١}{٢} \frac{ط}{٢} - \frac{١}{٢} \frac{١}{٤} ف^{٤} \frac{١ \times ٣}{٢ \times ٤} \frac{ط}{٢}$$
$$- \frac{١ \times ١ \times ٣}{٢ \times ٤ \times ٦} ف^{٦} \frac{١ \times ٣ \times ٥}{٢ \times ٤ \times ٦} \frac{ط}{٢} - \cdots$$

وإذن يكون

$$ب م ا = \frac{ح ط}{٢} \Big[١ - \left(\frac{١}{٢} ف\right)^{٢} - \frac{١}{٣} \left(\frac{١ \times ٣}{٢ \times ٤} ف^{٢}\right)^{٢}$$
$$- \frac{١}{٥} \left(\frac{١ \times ٣ \times ٥}{٢ \times ٤ \times ٦} ف^{٣}\right)^{٢} - \frac{١}{٧} \left(\frac{١ \times ٣ \times ٥ \times ٧}{٢ \times ٤ \times ٦ \times ٨} ف^{٤}\right)^{٢} - \cdots \Big]$$

وهذه المتسلسلة تقاربية ويكون تقاربها أكثر كلما كان ف صغيرا وقل الفرق بين ح و ب ومتى بعد القطع الناقص قليلا عن الدائرة المرسومة على المحور الاكبر كفى حساب حدود قليلة العدد من المتسلسلة لتحصيل المقدار بتقريب كاف

في حساب طول قوس من قطع زائد

بند ٨٩ — اذا اعتبر القطع الزائد المبين بالمعادلة

$$ح^{٢} ص^{٢} - ب^{٢} س^{٢} = - ح^{٢} ب^{٢}$$

يكون

$$ءل = ءس \sqrt{١ + \frac{ب^{٤} س^{٢}}{ح^{٤} ص^{٢}}} = ءس \sqrt{\frac{(ح^{٢} + ب^{٢}) س^{٢} - ح^{٤}}{ح^{٢} (س^{٢} - ح^{٢})}}$$

ولاجل الاختصار نضع

$$\sqrt{ح^{٢} + ب^{٢}} = ح ف$$

(وحرف ف رمز للنسبة بين البعد البوري والمحور القاطع) فيكون

$$ءل = ءس \sqrt{\frac{ف^{٢} س^{٢} - ح^{٢}}{س^{٢} - ح^{٢}}}$$

وحيث ان س يتغير بين ح والى مالانهاية فنضع

$$س = \frac{ح}{حتا و}$$

(وحرف و يتغير من ٠ الى $\frac{ط}{٢}$) فيكون

$$ء س = \frac{ح جا و ء و}{حتا^٢ و}$$

واذن يكون

$$ء ر = \frac{ء و}{حتا^٢ و} \sqrt{ح^٢ ف^٢ - ح^٢ حتا^٢ و} = \frac{ح ف ء و}{حتا^٢ و} \sqrt{١ - \frac{حتا^٢ و}{ف^٢}}$$

واذن يكون

$$ر = قوس ا م = \int_{.} ح ف \frac{ء و}{حتا^٢ و} \sqrt{١ - \frac{حتا^٢ و}{ف^٢}}$$

ولاجل تحصيل هذا التكامل يحل الجذر $\sqrt{١ - \frac{حتا^٢ و}{ف^٢}}$ بواسطة قانون ذات الحدين فيحدث

$$ر = ح ف \int_{.} \frac{ء و}{حتا^٢ و} \left[١ - \frac{١}{٢} \frac{حتا^٢ و}{ف^٢} - \frac{١}{٢} \frac{١}{٤} \frac{حتا^٤ و}{ف^٤} - \cdots - \frac{١ \times ١ \times ٣ \cdots (٢ ن - ٣)}{٢ \times ٣ \times ٦ \cdots ٢ ن} \frac{حتا^{٢ن} و}{ف^{٢ن}} - \cdots \right]$$

ومن هنا يكون

$$ر = ح ف طا و - \frac{١}{٢} \frac{ح}{ف} و - \frac{ح}{ف} \int_{.} \left(\frac{١}{٢} \frac{١}{٤} \frac{حتا^٢ و}{ف^٢} + \frac{١ \times ١ \times ٣}{٢ \times ٤ \times ٦} \frac{حتا^٤ و}{ف^٤} + \cdots \right) ء و$$

ولم يبق الا حساب تكاملات بالصورة $حتا^م و ء و$ فيها م عدد زوجى و يتحصل عليها بالقانون المعلوم

فى حساب طول السيكلويد

بند ٩٠ اذا أخذت الاحداثيات كما فى الفصل المتقدم يكون

$$ء س = ء ص \sqrt{\frac{٢ ح - ص}{ص}}$$

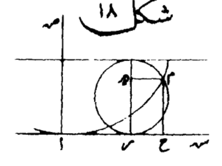
واذن يكون

$$ف ن = ف ص \sqrt{\frac{٢ح - ص}{ص} + ١} = ف ص \sqrt{\frac{٢ح}{ص}} = ٢ \sqrt{٢ح} \; \frac{ف ص}{٢\sqrt{ص}}$$

وبأخذ تكامل هذا القانون بين النهايتين ٠ و ص يحدث

$$ن = \text{قوس ا م} = ٢ \sqrt{٢ح} \int_{٠}^{ص} \frac{ف ص}{٢\sqrt{ص}} = ٢ \sqrt{٢ح} \sqrt{ص}$$

وبعد المماس للسيكلويد فى نقطة م وتحديده بنقطة ن الذى يتقابل فيها بمحور السينات نجد



$$م ن = \sqrt{٢ح ص}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\text{قوس م ا} = ٢ \; م ن$$

وهذه خاصية معلومة

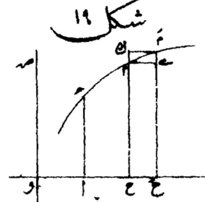
فاذا أريد ايجاد طول نصف السيكلويد لزم جعل ص = ٢ح وحينئذ يكون ٤ح هو الطول المطلوب

الفصل الثالث

فى تكعيب الاجسام

فى تكعيب الاجسام التحركية

بند ٩١ لنفرض ان ع مساحة الجسم الحادث من دوران المساحة المستوية ح ا م ع حول المحور وس فاذا زيد المتغير س بالكمية ف س = ع عَ فان الجسم ع يزداد زيادة ف ع مساوية للجسم الحادث من دوران م مَ ع عَ



فاذا فرض ان ف س صغير بحيث يزداد أو يتناقص ص على الدوام فى المسافة م مَ يكون ف ع محصورا بين حجمى الاسطوانتين الحادثتين من دوران المستطيلين

م ء ح حَ و لـ مَ ح حَ وحينئذ اذا كان صـ متزايدا ورمزنا بحرف صـ١ للرأسى مَ حَ يحدث

$$\text{ط}\,\text{صـ}_{1}^{2}\,\text{ف سـ} > \text{ف ح} > \text{ط}\,\text{صـ}^{2}\,\text{ف سـ}$$

أو

$$\text{ط}\,\text{صـ}_{1}^{2} > \frac{\text{ف ح}}{\text{ف سـ}} > \text{ط}\,\text{صـ}^{2}$$

وتتغير جهة هاتين المتباينتين اذا كان صـ متناقصا وفى كل حال تكون النسبة $\frac{\text{ف ح}}{\text{ف سـ}}$ محصورة بين كميتين تقربان احداهما من الاخرى كلما تناقص ف سـ وعند النهاية يكون

$$\frac{\text{ء ح}}{\text{ء سـ}} = \text{ط}\,\text{صـ}^{2}$$

ومن هنا يكون

$$\text{ح} = \text{ط} \int \text{صـ}^{2}\,\text{ء سـ}$$

ومن هنا يعلم انه يلزم استخراج مقدار صـ من معادلة المنحنى بدلالة سـ وأخذ التكامل بين النهايتين المطابقتين لنهايتى القوس الراسم

فى تكعيب مجسم القطع الناقص التحركى

شكل ٤٠

بـ ٩٣ ـد ليكن ح الجسم الحادث من دوران جزء ا م ع من قطع ناقص دائر حول محوره الاكبر فمعادلة القطع الناقص منسوبا لمحوره الاكبر والمماس من رأسه هى

$$\text{صـ}^{2} = \frac{\text{ب}^{2}}{\text{حـ}^{2}}\left(2\,\text{حـ سـ} - \text{سـ}^{2}\right)$$

وحينئذ يكون

$$\text{ح} = \frac{\text{ط ب}^{2}}{\text{حـ}^{2}} \int_{0}^{\text{سـ}} \left(2\,\text{حـ سـ} - \text{سـ}^{2}\right)\text{ء سـ} = \frac{\text{ط ب}^{2}}{\text{حـ}^{2}}\left(\text{حـ سـ}^{2} - \frac{\text{سـ}^{3}}{3}\right) \quad (1)$$

واذا جعل سـ = ٢ حـ تحصل مساحة جسم القطع الناقص بتمامه وهى

$$\text{ح} = \frac{\text{ط ب}^{2}}{\text{حـ}^{2}}\left(4\,\text{حـ}^{3} - \frac{8\,\text{حـ}^{3}}{3}\right) = \frac{4}{3}\,\text{ط ب}^{2}\,\text{حـ} \quad (2)$$

ولتحصيل مساحة الجسم الحادث من دوران نصف القطع الناقص حول محوره الاصغر يلزم ابدال حرف ب بحرف حـ وحرف حـ بحرف ب فيتحصل $\frac{4}{3}$ ط حـ^{2} ب ويشاهد ان هذه المساحة أكبر من المساحة الاولى

وبجعل ب = ح فى هذه القوانين يوجد $\frac{4}{3}$ ط ح^{3} وهى مساحة جسم الكرة ويكون $\frac{\text{ط س}^{2}\,(3\text{ح} - \text{س})}{3}$ مقدار مساحة القطعة الكروية ذات القاعدة الواحدة

فى مساحة الجسم الحادث من دوران سيكلويد

بند ٩٣ لنجعل المحورين الاحداثيين هما المماس من الرأس والعمودى فى هذه النقطة ونفرض ان ع مساحة الجسم الحادث من دوران أ م ع حول المحور أ س فحيث كانت المعادلة التفاضلية للسيكلويد هى

شكل ٢١

$$\text{ءس} = \text{ءص}\sqrt{\frac{2\text{ح} - \text{ص}}{\text{ص}}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ص}}\sqrt{2\text{حص} - \text{ص}^{2}}$$

فيكون

$$\text{ع} = \text{ط}\int_{0}^{\text{ص}} \text{ص ءص}\sqrt{2\text{حص} - \text{ص}^{2}}$$

أو

$$\text{ع} = \text{طح}\int_{0}^{\text{ص}} \text{ءص}\sqrt{2\text{حص} - \text{ص}^{2}} - \text{ط}\int_{0}^{\text{ص}} (\text{ح} - \text{ص})\,\text{ءص}\sqrt{2\text{حص} - \text{ص}^{2}}$$

والتكامل الاول هو مساحة سطح الجزء ا ك ه ولتحصيل التكامل الثانى نجعل

$$2\text{حص} - \text{ص}^{2} = \text{ع} \quad \text{فيكون} \quad 2(\text{ح} - \text{ص})\,\text{ءص} = \text{ءع}$$

ويكون

$$\int (\text{ح} - \text{ص})\,\text{ءص}\sqrt{2\text{حص} - \text{ص}^{2}} = \int \sqrt{\text{ع}}\,\frac{\text{ءع}}{2} = \frac{1}{2}\int \text{ع}^{\frac{1}{2}}\,\text{ءع} = \frac{\text{ع}^{\frac{3}{2}}}{3}$$

واذن يكون

$$\text{ع} = \text{طح} \times \text{جزء ا ك ه} - \frac{\text{ط}}{3}\left(2\text{حص} - \text{ص}^{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ويتحصل على مساحة الجسم الحادث من دوران ا ء م حول ا س بحساب الفرق بين مساحتى الجسمين الحادثين من دوران المستطيل ا ح م ك والجزء ا م ع

فى الاجسام التى يمكن تحصيل مساحتها بعملية تكامل واحدة

بند ٩٤ يمكن أيضا بعملية تكامل واحدة تحصيل مساحة الجسم متى كانت مساحة القطاع الحادث من قطع هذا الجسم بمستو موازٍ للمستوى ص و ع دالة للبعدين هذين المستويين

فلنفرض فى أول الامر ان المحاور عمادية وان ں و ں + ف ں مساحتا القطاعين الحادثين من قطع الجسم بمستويين م و مَ موازيين للمستوى صـ و ع وبعداهما عن هذا الاخير هما سـ و سـ + ف سـ بالتناظر فتكون زيادة الجسم ف ح المطابقة للزيادة ف سـ للافقى محصورة بين الاسطوانتين القائمتين اللتين قاعدتاهما بالتناظر هما ں و ں + ف ں وارتفاعهما ف سـ أعنى انه يكون

شكل ٢٢

$$(\text{ں} + \text{ف ں})\,\text{ف سـ} > \text{ف ح} > \text{ں ف سـ}$$

(وذلك بفرض ف ں موجبا) واذن يكون

$$\text{ں} + \text{ف ں} > \frac{\text{ف ح}}{\text{ف سـ}} > \text{ں}$$

وعند النهاية ينعدم ف ں ويكون

$$\frac{\text{ء ح}}{\text{ء سـ}} = \text{ں} \quad \text{او} \quad \text{ء ح} = \text{ں ء سـ}$$

وحينئذ تحصل مساحة الجسم المحصور بين مستويين موازيين للمستوى صـ و ع ومتباعدين عنه بالبعدين ا و ب بواسطة القانون

$$\text{ح} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ں ء سـ}$$

ولتحصيل مساحة الجسم بتمامه يلزم مد مستويين مماسين موازيين للمستوى صـ و ع وجعل نهايتى التكامل هما بعدا هذين المستويين عن المستوى صـ و ع

بند ٩٥ ولنفرض الآن ان المحور و سـ مائل على مستوى القطاعين فمقارنة الجسم المحصور بين مستويين موازيين للمستوى صـ و ع والسطح باسطوانة مائلة قاعدتها ں وارتفاعها البعد ں سـ حاے بين المستويين (وحرف ے رمز للزاوية الواقعة بين المستوى سـ صـ والمحور و سـ) يكون

$$\text{ء ح} = \text{ں ء سـ حاے}$$

ويكون

$$\text{ح} = \text{حاے} \int \text{ں ء سـ}$$

بند ٩٦ مثلا لنفرض مخروطا ذا قاعدة حيثما اتفق ونجعل محور السينات هو العمود و ح النازل

من الرأس على القاعدة ونمد من الرأس مستويا موازيا للقاعدة ونجعله مستوى الصادات والعينات ونرمز له بحرف ر لارتفاع المخروط وبحرف ب لقاعدته فبعد مستو مواز للمستوى ص ع على بعد و ج = س تكون مساحة القطاع هى $\frac{ب س^2}{ر^2}$ واذن يكون

شكل ٢٣

$$ح = \int_{0}^{س} \frac{ب س^2 ء س}{ر^2} = \frac{ب س^3}{٣ ر^2}$$

وبجعل س = ر تكون مساحة المخروط هى $\frac{ب ر}{٣}$

بند ٩٧ ولنعتبر مجسم القطع الناقص الذى معادلته بالنسبة للمحاور الاصلية هى

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{ح^2} = ١$$

فالقطاع ن ح ر الحادث من قطع الجسم بمستو مواز للمستوى ص ع على بعد س معادلته هى

$$\frac{ص^2}{ب^2} + \frac{ع^2}{ح^2} = ١ - \frac{س^2}{أ^2}$$

ويتحصل على نصفى محوريه بجعل ع = ٠ و ص = ٠ بالتوالى فيحدث

شكل ٢٤

$$ن ح = ب\sqrt{١ - \frac{س^2}{أ^2}} \quad ، \quad ح ر = ح\sqrt{١ - \frac{س^2}{أ^2}}$$

وتكون مساحة القطاع هى

$$ط ب ح \left(١ - \frac{س^2}{ح^2}\right) = \frac{ط ب ح}{أ^2}(أ^2 - س^2)$$

وتكون مساحة الجزء الجسمى ح المحصور بين المستويين ص و ع و ن ح ر هى

$$ح = \frac{ط ب ح}{أ^2}\int_{0}^{س} (أ^2 - س^2)\, ء س = \frac{ط ب ح}{أ^2}\left(أ^2 س - \frac{س^3}{٣}\right)$$

ولتحصيل مساحة نصف مجسم القطع الناقص يجعل س = أ فى القانون فيحدث

$$ح = \frac{ط ب ح}{أ^2}\left(أ^3 - \frac{أ^3}{٣}\right) = \frac{٢}{٣} ط أ ب ح$$

وحينئذ تكون مساحة مجسم القطع الناقص بتمامه هى $\frac{٤}{٣}$ ط أ ب ح

الفصل الرابع

فى التكاملات المضاعفة وحساب مساحات السطوح المنحنية

فى التكاملات المضاعفة

بند ٩٨ اذا فرضت دالة مثل ع للمتغيرين س و ص اللذين ثانيهما دالة للاول وضربت فى ءص وأخذ التكامل بين نهايتين معينتين مثل د(س) و $د_1$(س) أعنى أجريت العملية $\int_{د(س)}^{د_1(س)} ع\, ءص$ باعتبار س ثابتا ثم اعتبرت الدالة التفاضلية $ءس \int_{د(س)}^{د_1(س)} ع\, ءص$ وأخذ تكاملها بالنسبة للمتغير س بين النهايتين ا و ب سمى الناتج $\int_{ا}^{ب} ءس \int_{د(س)}^{د_1(س)} ع\, ءص$ تكاملا مزدوجا

ويكون التكامل المزدوج محدودا اذا عينت نهايات التكاملين ويكون غير محدود فى الحالة العكسية واذذاك يبين هكذا

$$\int\int ع\, ءس\, ءص$$

بند ٩٩ كل تكامل مزدوج مثل $\int_{ا}^{ب} ءس \int_{د(س)}^{د_1(س)} ع\, ءص$ هو نهاية مجموع جميع حواصل الضرب التى صورتها ع ف س ف ص بين نهايات عمليتى التكامل

لان $\int_{د(س)}^{د_1(س)} ع\, ءص$ هو التكامل المحدود للدالة التفاضلية ع ءص مأخوذا بين النهايتين د(س) و $د_1$(س) للدالة ص وفيه س معتبر ثابتا واذن يكون

$$\int_{د(س)}^{د_1(س)} ع\, ءص = نها\ مج\ (ع\ ف\ ص)$$

وحينئذ اذا ضرب فى ف س وغير س من س = ا الى س = ب يحدث

$$مج\ (ف\ س \int_{د(س)}^{د_1(س)} ع\, ءص) = مج\ [ف\ س\ نها\ مج\ (ع\ ف\ ص)]$$

ويكون

$$نها\ مج\ (ف\ س \int_{د(س)}^{د_1(س)} ع\, ءص) = \int_{ا}^{ب} ءس \int_{د(س)}^{د_1(س)} ع\, ءص$$

وحيث كان سـ معتبرا ثابتا فى كمية مح (ع ف صـ) فيكون

$$\text{نها مح}\left[\text{ف سـ نها مح}(\text{ع ف صـ})\right] = \text{نها مح}\left[\text{نها مح}(\text{ع ف صـ ف سـ})\right]$$

أو

$$\text{نها مح}\left[\text{ف سـ نها مح}(\text{ع ف صـ})\right] = \text{نها مح مح}(\text{ع ف صـ ف سـ})$$

وحينئذ يكون

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ء سـ} \int_{\text{د}_{1}(\text{سـ})}^{\text{د}_{2}(\text{سـ})} \text{ع ء صـ} = \text{نها مح مح}(\text{ع ف صـ ف سـ})$$

فى التكامل الثلاثى

لتكن ن = د (سـ و صـ و ع) دالة ذات ثلاثة متغيرات غير متعلقة وهى سـ و صـ و ع فاذا أخذ تكامل التفاضل ن ء ع بالنسبة لمتغير ع أعنى باعتبار سـ و صـ ثابتين وغير ع بين نهايتين مبينتين بدالتين لمتغيرى سـ و صـ نفرضهما د_{1}(سـ و صـ) و د_{2}(سـ و صـ) يوجد التكامل

$$\int_{\text{د}_{1}(\text{سـ و صـ})}^{\text{د}_{2}(\text{سـ و صـ})} \text{ن ء ع}$$

الذى يكون دالة للمتغيرين سـ و صـ

ولنعتبر الآن سـ ثابتا فى الدالة

$$\text{ء صـ} \int_{\text{د}_{1}(\text{سـ و صـ})}^{\text{د}_{2}(\text{سـ و صـ})} \text{ن ء ع}$$

ونأخذ تكامل هذه الدالة بالنسبة لمتغير صـ بين نهايتين لهذا المتغير نفرضهما د_{3}(سـ) و د_{4}(سـ) فيوجد التكامل

$$\int_{\text{د}_{3}(\text{سـ})}^{\text{د}_{4}(\text{سـ})} \text{ء صـ} \int_{\text{د}_{1}(\text{سـ و صـ})}^{\text{د}_{2}(\text{سـ و صـ})} \text{ن ء ع}$$

الذى يكون دالة لمتغير سـ

ثم اذا أخذ تكامل التفاضل

$$\text{ء سـ} \int_{\text{د}_{3}(\text{سـ})}^{\text{د}_{4}(\text{سـ})} \text{ء صـ} \int_{\text{د}_{1}(\text{سـ و صـ})}^{\text{د}_{2}(\text{سـ و صـ})} \text{ن ء ع}$$

بالنسبة لمتغير سـ بين نهايتين أ و ب لهذا المتغير يكون الناتج هو

$$\int_{أ}^{ب} \text{ء س} \int_{ى_3(\text{س})}^{ى_4(\text{س})} \text{ء ص} \int_{ى_1(\text{س و ص})}^{ى_2(\text{س و ص})} \text{ق ء ع}$$

وهذا مايسمى تكاملا ثلاثيا ويبين أيضا هكذا

$$\iiint \text{ق ء س ء ص ء ع}$$

وبمثل ذلك يمكن تصور التكامل الذى برتبة حيثما اتفق

واعلم انه فى حالة التكامل الثلاثى يكون أيضا

$$\int_{أ}^{ب} \text{ء س} \int_{ى_3(\text{س})}^{ى_4(\text{س})} \text{ء ص} \int_{ى_1(\text{س و ص})}^{ى_2(\text{س و ص})} \text{ق ء ع} = \text{نها} \sum\sum\sum (\text{ق ف س ف ص ف ع})$$

ولما كان الاثبات مشابها بالكلية للاثبات الذى أوردناه فى التكامل المزدوج قد استصوبنا عدم ذكره هنا دفعا للتكرار

فى مسائح السطوح التحركية

بلند مساحة السطح التحركى تحصل بواسطة عملية تكامل واحدة فليكن حم ى منحنيا مستويا يولد بدورانه حول المحور وس الموجود فى مستويه السطح المراد ايجاد مساحته وليكن حم مَ ى مضلعا مرسوما داخل هذا المنحنى فيمكن اعتبار مساحة السطح نهاية مجموع سطوح مخاريط ناقصة متولدة من دوران المضلع المذكور حيثما يزيد عدد أضلاعه الى مالانهاية

شكل ٢٥

اذا تقرر هذا فلتكن

$$\text{م (س و ص) و مَ (س + ف س و ص + ف ص)}$$

رأسين متجاورين من رؤس المضلع فيكون مقدار السطح المرسوم بدوران م مَ هو

$$\tfrac{1}{2}\ \text{م مَ (محيط م ع + محيط مَ عَ)}$$

أو

$$\text{ط } (2\text{ص} + \text{ف ص}) \text{ ف س } \sqrt{1 + \left(\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}\right)^2}$$

وحيث أن

$$\text{نها}\,(\text{٢ص} + \text{ف ص})\sqrt{\text{١} + \left(\frac{\text{ف ص}}{\text{ف س}}\right)^{\text{٢}}} = \text{٢ص}\sqrt{\text{١} + \left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)^{\text{٢}}}$$

فيكون مقدار سطح المخروط الناقص هو

$$\text{٢ط ص}\left[\sqrt{\text{١} + \left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)^{\text{٢}}} + \text{ل}\right]\text{ف س}$$

وحرف ل رمز لكمية تنعدم حينما ينعدم ف س وإذن يكون مقدار السطح المرسوم بالمضلع هو

$$\text{مجـ ٢ط ص}\left[\sqrt{\text{١} + \left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)^{\text{٢}}} + \text{ل}\right]\text{ف س}$$

وبالرمز بحرف لئ لمقدار السطح المطلوب يكون

$$\text{لئ} = \text{نها مجـ}\left(\text{٢ط ص}\sqrt{\text{١} + \left(\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}\right)^{\text{٢}}}\,\text{ف س}\right) + \text{٢ط ص نها مجـ}\,(\text{ل ف س})$$

وحيث أن $\text{نها مجـ}\,(\text{ل ف س}) = \text{٠}$ وكذا

$$\text{نها مجـ}\left(\text{٢ط ص}\sqrt{\text{١} + \frac{\text{ى ص}^{\text{٢}}}{\text{ى س}^{\text{٢}}}}\,\text{ف س}\right) = \text{٢ط}\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}\text{ص ى س}\sqrt{\text{١} + \frac{\text{ى ص}^{\text{٢}}}{\text{ى س}^{\text{٢}}}}$$

فيكون

$$\text{لئ} = \text{٢ط}\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}\text{ص ى س}\sqrt{\text{١} + \frac{\text{ى ص}^{\text{٢}}}{\text{ى س}^{\text{٢}}}}$$

و أ و ب هما أفقيا نهايتي القوس حـ د

فإذا رمز بحرف ع لقوس محسوب بالابتداء من نقطة ثابتة يكون

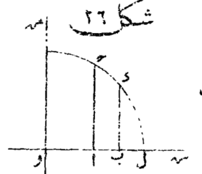
$$\text{ى ع} = \text{ى س}\sqrt{\text{١} + \frac{\text{ى ص}^{\text{٢}}}{\text{ى س}^{\text{٢}}}}$$

وإذن يكون

$$\text{لئ} = \text{٢ط}\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}\text{ص ى ع}$$

فى مساحة المنطقة الكروية

بند ولنطبق القانون المتقدم للبحث عن مساحة المنطقة المتولدة من دوران قوس الدائرة حء حول القطر ول فنفرض ان



$$\text{س}^2+\text{ص}^2=\text{نق}^2$$

معادلة الدائرة ونفرض ان ل مساحة المنطقة وان وا = ا ، وب = ب فيكون

$$\text{ل}=2\text{ط}\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}\text{ص}\,\text{ءس}\sqrt{1+\frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}}$$

$$=2\text{ط}\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}\text{ص}\,\text{ءس}\sqrt{1+\frac{\text{س}^2}{\text{ص}^2}}=2\text{ط}\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}\text{نق}\,\text{ءس}$$

واذا يكون

$$\text{ل}=2\text{ط}\,\text{نق}\,(\text{ب}-\text{ا})=2\text{ط}\,\text{نق}\times\text{اب}$$

وهو ناتج معلوم

فان اريد ايجاد مساحة سطح الكرة بتمامه لزم جعل نهايتى التكامل هما $\text{س}=-\text{نق}$ و $\text{س}=\text{نق}$ وبذلك يوجد المقدار المعلوم وهو $4\,\text{ط}\,\text{نق}^2$

فى مساحة سطح مجسم القطع الناقص الدورانى

بند ولنفرض الآن أن المنحنى الراسم هو واب الذى هو نصف قطع ناقص ونفرض أنه يدور حول أحد محوريه وليكن وا ونبحث أولا عن مساحة السطح المتولد من دوران القوس ب م الذى مبدؤه النهاية ب للمحور الآخر فيكون

شكل ٢٧

$$\text{ل}=2\text{ط}\int_{\text{.}}^{\text{س}}\text{ص}\,\text{ءس}\sqrt{1+\frac{\text{ءص}^2}{\text{ءس}^2}}$$

وحيث كانت معادلة القطع الناقص هى

$$\text{أ}^2\text{ص}^2+\text{ب}^2\text{س}^2=\text{أ}^2\text{ب}^2$$

فيكون

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}=-\frac{\text{ب}^2\text{س}}{\text{أ}^2\text{ص}}$$

واذن يكون

$$\sqrt{1+\frac{\text{ء}\text{ص}^2}{\text{ء}\text{س}^2}}=\frac{\sqrt{\text{ا}^4\text{ص}^2+\text{ب}^4\text{س}^2}}{\text{ا}^2\text{ص}}$$

وبتعويض $\text{ا}^2\text{ص}^2$ في هذا المقدار بما يساويه $\text{ا}^2\text{ب}^2-\text{ب}^2\text{س}^2$ يحدث

$$\sqrt{1+\frac{\text{ء}\text{ص}^2}{\text{ء}\text{س}^2}}=\frac{\text{ب}\sqrt{\text{ا}^4-(\text{ا}^2-\text{ب}^2)\,\text{س}^2}}{\text{ا}^2\text{ص}}$$

ولنفرض أوّلا ان $\text{ا} > \text{ب}$ أعني ان القطع الناقص دائر حول محوره الاكبر ونضع $\sqrt{\text{ا}^2-\text{ب}^2}=\text{ا}\,\text{و}$ فيحدث

$$\sqrt{1+\frac{\text{ء}\text{ص}^2}{\text{ء}\text{س}^2}}=\frac{\text{ب}\sqrt{\text{ا}^4-\text{ا}^2\text{و}^2\text{س}^2}}{\text{ا}^2\text{ص}}=\frac{\text{ب}\sqrt{\text{ا}^2-\text{و}^2\text{س}^2}}{\text{ا}\,\text{ص}}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\text{ك}=2\text{ط}\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\int_{.}^{\text{س}}\text{ء}\text{س}\sqrt{\text{ا}^2-\text{و}^2\text{س}^2}=\frac{2\text{ط}\,\text{ب}\,\text{و}}{\text{ا}}\int_{.}^{\text{س}}\text{ء}\text{س}\sqrt{\frac{\text{ا}^2}{\text{و}^2}-\text{س}^2}$$

لكن

$$2\int_{.}^{\text{س}}\text{ء}\text{س}\sqrt{\frac{\text{ا}^2}{\text{و}^2}-\text{س}^2}=\text{س}\sqrt{\frac{\text{ا}^2}{\text{و}^2}-\text{س}^2}+\frac{\text{ا}^2}{\text{و}^2}\,\text{قوس حا}\,\frac{\text{و}\,\text{س}}{\text{ا}}$$

فاذا يكون

$$\text{ك}=\frac{\text{ط}\,\text{ب}\,\text{و}}{\text{ا}}\left(\text{س}\sqrt{\frac{\text{ا}^2}{\text{و}^2}-\text{س}^2}+\frac{\text{ا}^2}{\text{و}^2}\,\text{قوس حا}\,\frac{\text{و}\,\text{س}}{\text{ا}}\right)$$

بعد اذا فرض ان $\text{س}=\text{ا}$ في هذا القانون وضرب الناتج في ٢ يوجد المقدار

$$2\text{ط}\,\text{ب}^2+\frac{2\text{ط}\,\text{ب}\,\text{ا}}{\text{و}}\,\text{قوس حا}\,\text{و}$$

وهو المساحة الكلية لسطح مجسم القطع الناقص بتمامه

فاذا فرض ان $\text{و}=.$ يؤل مجسم القطع الناقص الى كرة وبملاحظة ان نها $\frac{\text{قوس حا}\,\text{و}}{\text{و}}=1$ حينما يكون $\text{و}=.$ يوجد المقدار $4\,\text{ط}\,\text{ا}^2$ وهو مساحة الكرة

بند ١٠٥ ولنفرض الآن أن $ا < ب$ وان $\sqrt{ب^٢ - ا^٢} = ب و$ فيكون

$$ن = ٢ ط \int ص ء س \frac{ب \sqrt{ا^٤ + (ب^٢ - ا^٢) س^٢}}{ا^٢ ص}$$

$$= \frac{٢ ط ب}{ا^٢} \int ء س \sqrt{ا^٤ + ب^٢ و^٢ س^٢} = \frac{٢ ط ب^٢ و}{ا^٢} \int ء س \sqrt{\frac{ا^٤}{ب^٢ و^٢} + س^٢}$$

لكن

$$\int ء س \sqrt{س^٢ + ح} = \frac{س \sqrt{س^٢ + ح}}{٢} + \frac{ح}{٢} لو \left(س + \sqrt{س^٢ + ح}\right) + ث$$

فاذا يكون

$$ن = \frac{ط ب^٢ و}{ا^٢} \left[س \sqrt{\frac{ا^٤}{ب^٢ و^٢} + س^٢} + \frac{ا^٤}{ب^٢ و^٢} لو \left(س + \sqrt{\frac{ا^٤}{ب^٢ و^٢} + س^٢} \right) \right] + ث$$

وحيث انه يجب أن ينعدم هذا التكامل بالمقدار $س = ٠$ فيكون

$$ث = - \frac{ط ب^٢ و}{ا^٢} \cdot \frac{ا^٤}{ب^٢ و^٢} لو \frac{ا^٢}{ب و}$$

واذا يكون

$$ن = \frac{ط ب^٢ و}{ا^٢} \left[س \sqrt{\frac{ا^٤}{ب^٢ و^٢} + س^٢} + \frac{ا^٤}{ب^٢ و^٢} لو \left(\frac{س + \sqrt{\frac{ا^٤}{ب^٢ و^٢} + س^٢}}{\frac{ا^٢}{ب و}} \right) \right]$$

فاذا فرض أن $س = ا$ وضرب فى ٢ يوجد المقدار

$$٢ ط ب \sqrt{ا^٢ + ب^٢ و^٢} + \frac{٢ ط ا^٢}{و} لو \left(\frac{ب و + \sqrt{ا^٢ + ب^٢ و^٢}}{ا} \right)$$

وهو مقدار مساحة سطح مجسم القطع الناقص بتمامه

بند ١٠٦ اذا فرض ان $و = ٠$ يشاهد بحل الكمية

$$\sqrt{ا^٢ + ب^٢ و^٢} = ا \left(١ + \frac{ب^٢ و^٢}{ا^٢} \right)^{\frac{١}{٢}}$$

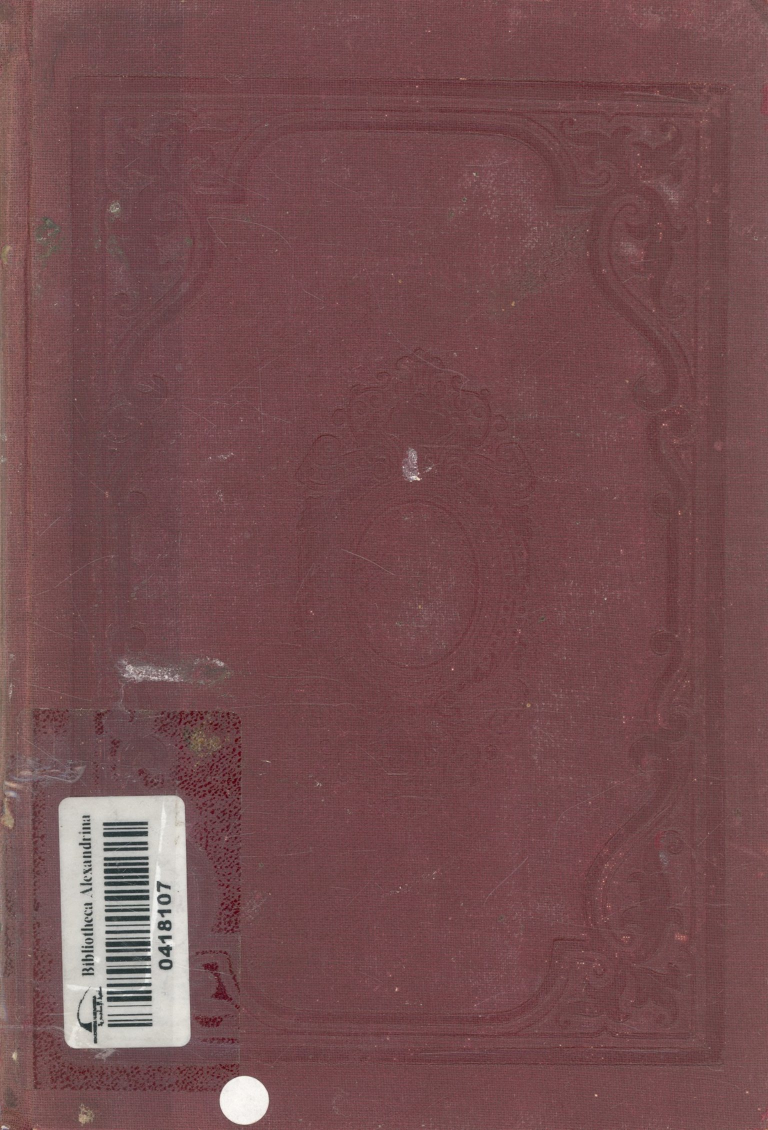
بواسطة قانون ذات الحدين أن

$$نها \frac{لو \frac{\left(ب و + \sqrt{ا^٢ + ب^٢ و^٢}\right)}{ا}}{و} = ١$$

وبذلك يوجد أن مساحة الكرة تساوى $٤ ط ا^٢$

هذا اخر ما أردنا ايراده فى هذا الكتاب من حساب التفاضل والتكامل لأولى الالباب
والحمد لله على كل حال والصلاة والسلام على سيدنا محمد وأصحابه والآل مالاح بدر تمام
وفاح مسك ختام آمين

وكان تمام طبعه وحسن وضعه بالمطبعة الكبرى العامرة ببولاق مصر القاهره مصححا
بمعرفة حضرة مؤلفه ذى الكمال والاتقان أدام الله معارفه منهلا عذبا لذوى العرفان فى ظل
الحضرة الفخيمة الخديوية والطلعة المباركة التوفيقية حفظ الله أنجاله الكرام
ورجال حكومته الفخام وذلك فى شهر شعبان المعظم من عام ١٣٠٧
من هجرة النبى صلى الله عليه وسلم


Bibliotheca Alexandrina
04181107